

UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS – UFR SCIENCES
Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées
Laboratoire Universitaire d'Astrophysique de Nice

THESE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Spécialité : Sciences de l'Univers

Par

AMOKRANE BERDJA

Effets de la Turbulence Atmosphérique lors de l'Observation du Soleil
à Haute Résolution Angulaire

Thèse dirigée par Julien BORGNINO

Soutenue le 03/ 12/ 2007

Devant le jury composé de

Andrei TOKOVININ	Rapporteur
Oskar von der LÜHE	Rapporteur
Jean ARNAUD	Examineur
Jean-Marc CONAN	Examineur
Marc SARAZIN	Examineur
Aziz ZIAD	Examineur
Julien BORGNINO	Directeur de thèse

A 14h 00 à la Faculté des Sciences de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Remerciements

Certainement dans le désordre, et en en oubliant sûrement, il m'est opportun de remercier toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont amené à mener à terme cette thèse.

Je tiens tout d'abord et avant tout à remercier Julien Borgnino, pour avoir été mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordé et pour son soutien. Je suis reconnaissant pour les enseignements qu'il m'a apportés, les discussions toujours fructueuses qu'on a eues, ainsi que pour les nombreuses pistes de recherches encore dans les cartons qui en ont découlé.

Je ne peux m'empêcher aussi d'avoir une pensée particulière pour ce laboratoire, le LUAN, qui avec son personnel, ses enseignants, ses étudiants crée un environnement particulièrement amical, et profondément humain. Je peux citer François Martin, Farrokh Vakili, Jean Vernin, Jocelyne Bettini, et les autres qui se reconnaîtront et que je n'ai point oubliés.

Concernant la thèse, je souhaite remercier Andrei Tokovinin et Oskar von der Lühe pour leurs rapports encourageants et leurs critiques constructives et pour avoir été dans mon jury de thèse, ainsi que Jean Arnaud pour avoir si aimablement présidé mon jury. Je remercie aussi Jean-Marc Conan, Marc Sarazin et Aziz Ziad d'avoir été les examinateurs de mon jury de thèse, et d'y avoir contribué par tant de discussions intéressantes.

Je remercie mes amis et tous ceux que j'aime et qui me font aimer la vie. Je remercie aussi ceux qui me pourrissent la vie parfois, car j'apprends d'eux la nature humaine.

Je remercie mes proches, mes parents, particulièrement mon petit frère Mohand et ma maman, grâce à qui tout est.

Table des matières

Introduction	5
1 La turbulence optique en astronomie	8
1.1 La turbulence optique	8
1.2 La turbulence dynamique dans les milieux fluides	8
1.2.1 Turbulence pleinement développée et approches statistique et spectrale	10
1.2.2 Cascade d'énergie et dynamique spectrale	11
1.2.3 La densité spectrale des fluctuations de l'indice de réfraction	14
1.3 La "turbulence optique"	16
1.3.1 Propagation optique à travers la turbulence	17
1.3.2 Propagation à travers les couches turbulentes de l'atmo- sphère	19
1.3.3 Densités spectrales spatiales des perturbations optiques .	21
1.3.4 Formation des images à travers la turbulence	22
1.3.5 Les PSF longue-pose	24
1.3.6 Le paramètre de Fried	27
1.4 Conclusion	28
2 La mesure du diamètre solaire à partir des images longue-pose du Soleil	30
2.1 Les variabilités solaires	30
2.1.1 Les variations du diamètre solaire	32
2.2 Images du bord solaire et turbulence optique	34
2.2.1 Assombrissement centre-bord solaire	34
2.3 Les images longue-pose du bord solaire	36
2.3.1 Calcul numérique des PSF longue-pose	37
2.4 Effets de turbulence optique sur les mesures du diamètre solaire en longue-pose	39
2.5 Conclusion	43
3 La mesure des fluctuations d'angle d'arrivée à partir de l'agi- tation sur les images courte-pose du bord solaire	44
3.1 Le Soleil en Haute Résolution Angulaire	44

3.2	Les images courte-pose du soleil en présence de turbulence optique	46
3.3	Simulation numérique des PSF instantanées en présence de turbulence optique	47
3.4	Effets de la turbulence optique sur les images du bord solaire . .	50
3.5	L'agitation du limbe dans les images courte-pose du bord solaire	53
3.6	Les fluctuations d'angle d'arrivée	54
3.7	Les fluctuations d'angle d'arrivée polychromatiques	57
3.8	Cas idéal : image d'un bord solide en présence d'une turbulence optique isoplanétique	66
3.9	Cas d'un bord solaire en présence d'une turbulence optique isoplanétique	70
3.10	Seuillage de la dérivée du profil du bord	73
3.11	Compensation de l'effet de l'assombrissement centre-bord par convolution	76
3.12	Application aux images longue-pose : le diamètre photométrique du Soleil	78
3.13	Effet du bruit sur les dérivées du profil d'intensité	78
3.14	Mesure de l'agitation du bord solaire par intégration photométrique	80
3.15	Mesures de l'agitation dans les cas anisoplanétiques	84
3.16	Conclusion	87
4	Observation plan-pupille de la turbulence optique diurne	89
4.1	L'observation plan-pupille de la turbulence optique	89
4.2	L'observation plan-pupille de la turbulence optique dans le cas d'une source ponctuelle	90
4.2.1	Les ombres volantes de scintillation	92
4.2.2	Le test de Foucault	92
4.3	L'observation plan-pupille de la turbulence optique dans le cas d'une source étendue	94
4.3.1	Le test de Foucault dans le cas d'un objet étendu	95
4.3.2	Cas de l'observation solaire	97
4.3.3	Effet de l'assombrissement centre-bord	97
4.3.4	Effet de l'anisoplanétisme	98
4.3.5	Simulation de l'observation plan-pupille des fluctuations d'angle d'arrivée pour la turbulence optique diurne	99
4.3.6	Application à l'estimation du profil de l'énergie de la turbulence optique diurne	111
4.3.7	Effets de la finesse de la fente	140
4.3.8	Effet de la scintillation	140
4.4	Conclusion	143
5	La variation temporelle de la turbulence optique	144
5.1	La variation temporelle de la turbulence optique et la HRA . . .	144
5.2	Les variations temporelles de la turbulence optique	147
5.3	L'approximation de la turbulence gelée - <i>the Frozen Flow Hypothesis</i>	148

5.3.1	Les densités spectrales temporelles dans l'approximation de la turbulence gelée	149
5.4	Le Bouillonnement de la Turbulence Optique - <i>the Optical Turbulence Boiling</i>	152
5.4.1	Le bouillonnement aux échelles limites du domaine inertiel	154
5.4.2	La variation temporelle de la turbulence optique par bouillonnement seul	155
5.4.3	Les densités spectrales temporelles dans le cas du bouillonnement seul	156
5.4.4	Solutions analytiques dans le domaine inertiel	158
5.4.5	Application à l'optique adaptative multiconjuguée prédictive	160
5.5	La variation temporelle de la turbulence optique par bouillonnement et déplacement horizontal simultanés	162
5.5.1	Les densités spectrales temporelles dans le cas de bouillonnement et déplacement horizontal	164
5.5.2	Modelling the optical turbulence boiling and its effects on finite-exposure differential image motion	166
5.5.3	Exemple d'application en interférométrie	177
5.6	Simulation numérique du bouillonnement de la turbulence optique	182
5.7	Conclusion	195
Conclusion		197
A Intégration numérique du bouillonnement		203
Bibliographie		207

INTRODUCTION

De la connaissance du monde, on n'a qu'un vague savoir subjectif issu de la perception. Il en est de même en Astronomie. C'est en effet la lumière que l'on reçoit des astres qui nous permet de conjecturer sur la nature de l'Univers.

La résolution angulaire d'un télescope, qui est sa capacité à nous permettre de distinguer les plus fins détails dans son champ de vision, est liée à la taille physique de sa pupille d'entrée effective, du moins en théorie (ou dans l'espace). Plus grande est la pupille, meilleure est la résolution angulaire de l'instrument. Ceci ne peut cependant se réaliser qu'en l'absence des effets de la turbulence atmosphériques, ou du moins si ceux-ci sont correctement compensés. En effet, la turbulence atmosphérique a pour effet de perturber la propagation de la lumière qui arrive jusqu'au télescope. Cette perturbation se traduit essentiellement par d'importantes aberrations optiques qui induisent des images de mauvaise qualité au foyer du télescope.

En se propageant à travers la turbulence atmosphérique, une onde lumineuse est soumise à des variations de phase et d'intensité. L'image d'une étoile dans ces conditions n'est plus une tache de diffraction à travers la pupille du télescope mais une distribution irrégulière qui dépend essentiellement de la distribution spatiale des fluctuations de phase à l'entrée du télescope. Une telle figure, formée de tavelures (*speckles*), varie dans le temps et finit par former en longue pose une tache de diffraction qui est plus étendue que celle du télescope seul. La résolution angulaire d'un instrument au sol est donc tributaire des conditions de turbulence optique (effets sur la lumière de la turbulence atmosphérique). Ceci explique l'importance du choix des sites d'observation en fonction des propriétés statistiques de la turbulence optique.

Il existe par ailleurs des techniques qui permettent en principe de compenser les effets de la turbulence optique sur les observations astronomiques. Celles-ci peuvent être classées selon deux approches. Dans la première la compensation est introduite en temps réel sur le chemin optique de la lumière dans le télescope. Il s'agit de mesurer les déformations des fronts d'onde et d'y appliquer une déformation inverse pour former des images avec des ondes planes comme s'il n'y avait pas de turbulence optique (Il s'agit de l'optique adaptative). La deuxième approche consiste en des traitements numériques a posteriori sur des séries d'image afin d'y extraire l'information sur l'image de l'objet d'étude qui se rapprocherait de celui qu'on aurait eu sans turbulence optique (Techniques largement développées à partir de 1970, dans le cadre de l'interférométrie des

tavelures proposée par A. Labeyrie).

L'efficacité (ou non) de ces techniques d'observation et de compensation reposent en grande partie sur les conditions de la turbulence optique durant les observations, et de manière cruciale encore du taux de variation et de dé-corrélation de la turbulence optique. La variation temporelle de la turbulence optique est encore aujourd'hui modélisée par l'approximation de la turbulence gelée où plusieurs écrans de phase se déplacent à vitesse constante au dessus de l'observateur sans qu'ils changent de configuration spatiale. Je propose dans ce travail une modélisation différente qui définit un cadre formel dans lequel peuvent être définies les propriétés statistiques et spectrales de la turbulence optique évoluant par bouillonnement et par déplacement horizontal. En effet on introduit le bouillonnement qui est l'évolution propre de la turbulence optique dans chaque couche, ce qui a été ignoré jusqu'à maintenant. Des applications de ce modèle théorique sont discutées dans le cadre de l'optique adaptative, de l'astrométrie différentielle avec un télescope mono-pupille, et dans le cas de l'interférométrie à longue-base. La modélisation de la variation temporelle de la turbulence optique est discutée tout au long du chapitre 5.

Outre l'intérêt certain que j'ai porté aux aspects temporels de la turbulence optique, s'est aussi posé la très déconcertante problématique de la mesure astrométrique des éventuelles variations du diamètre solaire à partir du sol. Cette problématique est en effet sujette à un débat passionné opposant d'un côté les partisans d'un Soleil immuable et d'un volume invariant, et de l'autre côté ceux qui observent des variations cycliques et séculaires mais qui chose curieuse ne s'accordent ni sur l'amplitude ni sur la phase de telles variations. Un tel désaccord est généralement attribué aux effets de la turbulence optique sur les mesures du diamètre solaire. La méconnaissance de ces effets a conduit à considérer l'observation à partir de l'espace comme la seule solution à ce problème.

Il existe dans le cadre de cette problématique un projet de micro-satellite, PICARD [180], dont le but est de mesurer les éventuelles variations du diamètre photométrique apparent du Soleil à partir de l'espace. Malheureusement, ce satellite ne peut délivrer des mesures en orbite que durant un temps très limité par rapport à la durée du cycle d'activité solaire. Selon les prévisions actuelles (à partir des informations que l'on a actuellement), le lancement du satellite devrait s'effectuer vers début 2009, ce qui correspondrait à peu près à la phase ascendante de l'activité solaire. Cependant, comme on n'est pas sûr du déphasage de la variation du diamètre solaire par rapport à l'activité du Soleil, rien ne laisse présager que cette période corresponde forcément à une variation significative du diamètre solaire. Il est donc impératif dans le cadre de cette campagne de mesures de disposer d'une instrumentation astrométrique au sol qui soit dédiée à la mesure des variations du diamètre solaire tout au long du cycle d'activité et même au-delà s'il le faut.

Puisque les astrolabes sont des instruments de passage, l'effet instantané de la turbulence n'est pas du tout une agitation autour d'une position moyenne fixe comme pour les étoiles mais il existe un biais systématique qui dépend des conditions de *seeing* durant l'observation. Cet effet systématique peut être facilement modélisé dans le cadre d'une imagerie longue-pose du Soleil où l'effet

aléatoire de l'agitation est moyenné. C'est justement sur l'imagerie longue-pose du Soleil que se base la partie sol de la campagne d'observation PICARD. Bien que l'on n'ait pas suffisamment d'informations sur l'instrument il est prévu que ce soit une copie de l'instrument de mesure embarqué sur le satellite qui sera installé au sol et dont les opérations ne seront adaptées à l'observation au sol qu'a posteriori. Je montre néanmoins que si l'instrument a une précision suffisante, il est possible d'établir une relation systématique entre le retrait du bord (bord défini par convention par le point d'inflexion du profil de bord observé en longue-pose) et les conditions du *seeing* solaire et que ça peut servir à calibrer les mesures du diamètre solaire si on connaît précisément les conditions statistiques de la turbulence optique durant les mesures. Ce point est discuté dans le chapitre 2. Pour pouvoir corriger l'effet systématique de la turbulence optique sur les mesures de diamètre solaire en imagerie longue-pose du Soleil, il est important de connaître les conditions de la turbulence optique durant la mesure, ses propriétés statistiques et si possible spectrales. Pour cela, on choisit comme observable les fluctuations d'angle d'arrivée. Celles-ci peuvent a priori être observées selon deux procédés. Dans le premier on enregistre l'agitation qui affecte les images du bord solaire. L'effet de la turbulence optique sur les images d'un objet étendu comme le Soleil requiert une description phénoménologique légèrement différente de (et plus riche que) l'observation stellaire, et notamment à cause de l'assombrissement centre-bord solaire. L'extraction des fluctuations d'angle d'arrivée à partir des agitations du bord solaire n'est pas triviale. On montre en effet que les variations de la position du point d'inflexion ne peuvent pas être reliées en général aux fluctuations d'angle d'arrivée. Je discute ainsi de la meilleure façon de procéder en termes de fidélité et de stabilité par rapport aux bruits. C'est ce qui est discuté dans le chapitre 3.

Pour caractériser la turbulence optique (de jour ou de nuit) il faut aussi modéliser comme il faut les fluctuations d'angle d'arrivée. Je propose dans ce contexte un raffinement de la modélisation des fluctuations d'angle d'arrivée où la diffraction due à l'altitude des couches turbulentes dans le contexte d'un rayonnement polychromatique incohérent est prise en compte. C'est le sujet de l'article figurant dans le chapitre 3.

L'autre procédé retenu pour mesurer les fluctuations d'angle d'arrivée est de les observer dans le plan conjugué à la pupille d'entrée du télescope. Il s'agit alors d'effectuer un test de Foucault (*schlieren*) dans le cas d'un objet étendu en plaçant un masque au plan focal du télescope. Il est montré à travers des modélisations et des simulations numériques la faisabilité et les limitations optiques de cette approche dans le cadre de l'approximation du champ proche. Il est aussi discuté le cas où l'approximation du champ proche n'est pas satisfaite, et les solutions envisagées dans ce cas. Cette méthode, ainsi que son application à la profilométrie de la turbulence optique est présentée dans le chapitre 4.

Dans le cadre du projet PICARD déjà cité, le moniteur de *seeing* solaire MISOLFA [85] devrait utiliser les deux procédés pour caractériser la turbulence optique.

Ces sujets sont précédés d'un chapitre où la théorie de la turbulence optique utilisée est présentée et discutée. C'est le chapitre 1.

Chapitre 1

La turbulence optique en astronomie

1.1 La turbulence optique

La turbulence optique est une expression désignant l'ensemble des phénomènes optiques qui se manifestant lors de la propagation de la lumière à travers un milieu dynamiquement turbulent. On s'intéressera essentiellement à la turbulence optique lors des observations astronomiques dans les bandes visible et infrarouge pour une propagation lumineuse quasi-verticale. Le présent chapitre est une synthèse des différents aspects de cette théorie que l'on va utiliser par la suite dans ce document. On commencera d'abord par caractériser la turbulence dynamique puis on s'intéressera à la modélisation de la propagation lumineuse à travers.

1.2 La turbulence dynamique dans les milieux fluides

De ce que l'on peut observer dans l'écoulement d'un fluide, la turbulence est de loin ce qu'il y a de plus fascinant et de plus beau. La plupart des écoulements que l'on rencontre dans la nature sont en plus turbulents : la couche limite atmosphérique, les *jet streams* dans la tropopause, certaines formations nuageuses, et même la fumée de cigarette!

La turbulence dynamique désigne l'écoulement d'un fluide qui se manifeste par une grande irrégularité des champs de vitesse, de pression et de température en fonction de la position spatiale et du temps. Elle se manifeste aussi par une grande diffusivité et une importante dissipation (la turbulence est toujours dissipative et requiert de ce fait un apport constant d'énergie cinétique); elle est rotationnelle à trois dimensions [175].



FIG. 1.1 – La turbulence est un phénomène qu'on rencontre un peu partout dans la nature et à toutes les échelles. Là par exemple c'est une image prise par le télescope spatial Hubble d'une petite région de M17 (la nébuleuse Oméga) qui est située entre 5000 à 6000 années-lumière de nous dans la direction de la constellation du Sagittaire [199].

L'état de la turbulence dans un écoulement fluide est généré par une instabilité dynamique pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds. Ce nombre sans dimension est donné par

$$R = \frac{Lv}{\nu}, \quad (1.1)$$

où L et v sont respectivement une échelle spatiale et une vitesse relative caractéristiques et ν la viscosité cinématique du fluide.

Le nombre de Reynolds exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses dans un fluide en mouvement. Il caractérise l'instabilité dynamique de l'écoulement du fluide par rapport à un état d'écoulement laminaire.

L'écoulement d'un fluide incompressible par exemple est décrit par les équations de Navier-Stokes [11, 69] qui se présentent sous la forme d'une équation de bilan de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\vec{v} \nabla] \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (1.2)$$

où \vec{v} est le vecteur vitesse, P la pression et ρ la densité, et d'une équation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.3)$$

Lorsque le nombre de Reynolds est grand, les termes d'inertie l'emportent sur les termes de viscosité et c'est essentiellement la non-linéarité de cette dynamique qui donne ce caractère instable et chaotique aux écoulements turbulents. La non-linéarité qui caractérise la dynamique du fluide, couplée à une très grande sensibilité aux conditions initiales (et limites) rend ces équations insolubles en pratique pour la plupart des problèmes de turbulence. Il existe en effet une classe de problèmes de turbulence que l'on ne traite qu'avec une approche statistique. C'est la situation qui nous concerne en turbulence optique. Ce régime d'écoulement turbulent est la turbulence pleinement développée qu'il est possible de caractériser par une approche statistique.

1.2.1 Turbulence pleinement développée et approches statistique et spectrale

Lorsque le nombre de Reynolds est très grand, la turbulence est localement caractérisée par une variation d'une extrême irrégularité, tant spatialement que temporellement. On peut voir qu'avec une viscosité cinématique de l'air atmosphérique de $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, un vent d'une vitesse de l'ordre de 10 m/s sur une hauteur de l'ordre de 10 km donnerait un nombre de Reynolds de l'ordre de $R \approx 6.66 \cdot 10^9$, ce qui correspond à une turbulence pleinement développée.

Une turbulence pleinement développée (*fully developed turbulence*) est caractérisée par des variations aléatoires (plutôt chaotiques qu'aléatoires dirions-nous), imprédictibles et non-reproductibles. Ceci rend toute approche déterministe impossible [175]. Cependant, bien que les propriétés locales des champs de turbulence comme les variations spatiales ou temporelles de la vitesse ne soient pas prédictibles, leurs propriétés statistiques peuvent être tout à fait reproductibles [69]. La description de la turbulence peut donc être formulée via une approche statistique.

On peut donner dans ce contexte une image simple qui pourra être utile par la suite. Imaginons par exemple que l'on fasse une mesure d'une quantité fluctuante V dans un champ de turbulence. On peut se placer à une position donnée et mesurer les variations de cette quantité V au cours du temps, ou mesurer les variations de V le long d'une direction donnée à un instant donné. Dans les deux cas on obtient un signal aléatoire et imprédictible $V(X)$, où X est la position spatiale (monodimensionnelle) ou le temps. On peut donc dire que le signal $V(X)$ est imprédictible.

$$V(X) \equiv \text{random} \quad (1.4)$$

Si nous faisons à présent une décomposition spectrale du signal $V(X)$ à l'aide d'une transformée de Fourier, nous obtenons un signal complexe $TF\{V(X)\}$ dont l'amplitude et la phase sont aléatoires en fonction de la fréquence (spatiale ou temporelle). Chaque composante spectrale est une fonction complètement déterministe puisqu'il s'agit de fonctions harmoniques qui sont périodiques sur un support spatial ou temporel infini. C'est la composition de ces composantes spectrales avec des amplitudes et phases aléatoires qui donne un signal me-

suré aléatoire et imprédictible. On peut donc dire que le spectre $TF\{V(X)\}$ est imprédictible. Ceci est aussi valable pour la densité spectrale $|TF\{V(X)\}|^2$ calculée à partir d'une seule mesure du signal $V(X)$, elle est aléatoire et imprédictible.

$$|TF\{V(X)\}|^2 \equiv random \quad (1.5)$$

Si les composantes spectrales sont aléatoires et indépendantes pour des mesures individuelles du signal $V(X)$, elle obéissent en moyenne à une hiérarchisation qui découle de certaines propriétés dynamiques moyennes de la turbulence, que nous allons rencontrer dans le prochain paragraphe. Cette hiérarchisation intervient au niveau de la densité spectrale moyenne du signal spatial ou temporel $V(X)$. En effet, si on refait plusieurs fois la mesure, nous obtenons à chaque fois des densités spectrales $|TF\{V(X)\}|^2$ aléatoires et différentes même si l'on reste exactement dans les mêmes conditions expérimentales. C'est la caractéristique même de la turbulence pleinement développée. Si maintenant on calcule la moyenne statistique de la densité spectrale (spatiale ou temporelle) $\langle |TF\{V(X)\}|^2 \rangle$, on se retrouve avec une quantité déterministe qui dépend des conditions expérimentales du flux turbulent [69]. La densité spectrale $\langle |TF\{V(X)\}|^2 \rangle$ est donc déterministe et reproductible.

$$\langle |TF\{V(X)\}|^2 \rangle \equiv deterministic \quad (1.6)$$

Les propriétés statistiques de la turbulence s'expriment par une hiérarchisation statistique des composantes spectrales des variations de l'observable V à travers la densité spectrale moyenne $\langle |TF\{V(X)\}|^2 \rangle$. Le déterminisme de la densité spectrale moyenne n'altère en rien l'imprédictibilité des mesures individuelles comme on l'a vu, or la densité spectrale est liée via le théorème de Wiener-Khintchin à la covariance (spatiale ou temporelle) des variations $V(X)$. Il s'ensuit que la turbulence pleinement développée est caractérisée par l'irrégularité et par l'imprédictibilité des variations spatiales et temporelles des quantités qui en sont affectées et que ces signaux aléatoires obéissent néanmoins à des propriétés statistiques bien déterministes.

Dans le même esprit, la Figure 1.2 montre un signal aléatoire et imprédictible issu d'une densité spectrale moyenne, et donc d'une statistique déterministe. Cette approche nous sera utile par la suite pour la simulation numérique des effets de la turbulence.

1.2.2 Cascade d'énergie et dynamique spectrale

On a vu que dans le cas d'une turbulence pleinement développée telle que celle qui affecte les écoulements atmosphériques, il est quasiment impossible de prédire de manière causale les variations spatiales et temporelles des observables fluctuants telles que la vitesse ou la température. Il se dégage néanmoins de l'observation de la formation de la turbulence à partir d'un écoulement initialement laminaire une tendance phénoménologique d'ensemble que l'on peut associer aux

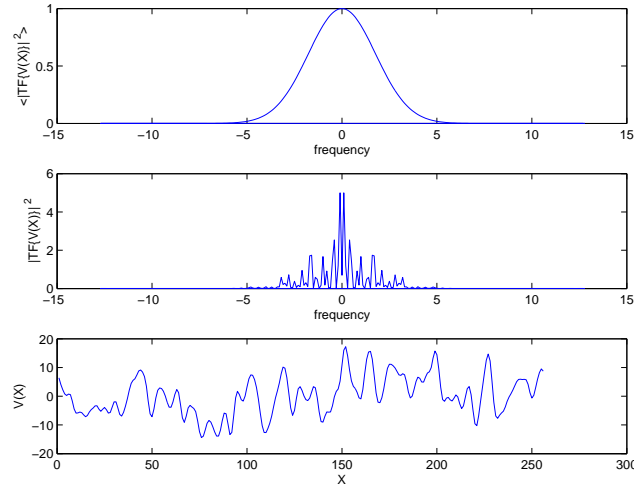


FIG. 1.2 – L'obtention d'un signal irrégulier et imprédictible à partir d'une densité spectrale moyenne déterministe. Les courbes sont tracées dans des unités arbitraires et ne sont qu'une illustration qualitative. Le premier graphique est une densité spectrale moyenne déterministe $\langle |TF\{V(X)\}|^2 \rangle$ sous forme d'une loi gaussienne quelconque. La symétrie est supposée établie par rapport aux fréquences positives et négatives. Cette densité spectrale nous sert à créer un spectre instantané (correspondant à une mesure singulière du signal) aléatoire $TF\{V(X)\}$ qui correspond statistiquement à la forme de la densité spectrale moyenne. Ce spectre complexe est aussi symétrique dans sa partie réelle et anti-symétrique dans sa partie imaginaire pour avoir un signal réel à la fin. La deuxième figure montre la densité spectrale instantanée $|TF\{V(X)\}|^2$ correspondante. En moyennant plusieurs densités spectrales instantanées aléatoires on retrouve la densité spectrale moyenne déterministe. À partir du spectre complexe aléatoire on obtient le signal instantané aléatoire $V(X)$ qui est représenté dans le troisième graphe. C'est le principe de la simulation numérique qu'on va utiliser plus loin pour modéliser les effets de la turbulence.

propriétés statistiques de la turbulence sans être en conflit avec l'imprédictibilité de la turbulence comme on a vu. Ce processus d'ensemble mène à l'image mentale de la cascade d'énergie de Richardson [175].

Dans cette représentation, la turbulence pleinement développée peut être représentée par une continuité de structures turbulentes à toutes les échelles, depuis les grandes échelles au niveau desquelles est injectée l'énergie cinétique qui engendre et maintient la turbulence, jusqu'aux plus petites échelles où s'opère la dissipation visqueuse de cette énergie. Ces structures turbulentes représentent des structurations de variations de vitesse sur des échelles spatiales et temporelles données et sont irrégulièrement distribuées tant spatialement que temporellement. Le modèle de la cascade de Richardson décrit de manière qualitative le transfert d'énergie des grands tourbillons aux plus petits de proche en proche (en terme d'échelles) à travers plusieurs stades d'interactions non-linéaires jusqu'à sa dissipation [175].

Avec un raisonnement dimensionnel appliqué aux équations de Navier-Stokes à l'aide de l'image mentale de la cascade d'énergie de Richardson, la théorie de A. N. Kolmogorov (1941) décrit la distribution d'énergie dans les structures turbulentes en fonction de leur dimension [69]. La théorie de Kolmogorov (aussi désignée par K41 dans la littérature) s'applique à un domaine d'échelles spatiales appelé le domaine inertiel dans un cas stationnaire d'injection d'énergie. Le domaine inertiel peut se définir comme étant un domaine d'échelles intermédiaires où la turbulence est isotrope, homogène (on parle des propriétés statistiques bien sûr), et où il n'y a ni injection d'énergie cinétique, ni dissipation d'énergie. La théorie de Kolmogorov permet de passer d'un raisonnement dimensionnel appliqué à des structures turbulentes de dimensions finies, à la formulation de la fonction de structure des fluctuations de vitesse dans le domaine inertiel d'une turbulence pleinement développée et au spectre d'énergie cinétique de la turbulence [69].

La densité spectrale monodimensionnelle d'énergie cinétique turbulente dans le domaine inertiel est donnée par

$$E(\kappa) \propto \kappa^{-5/3}, \quad (1.7)$$

où κ est le module du vecteur d'onde spatial

Cette théorie est bien vérifiée par l'expérience lorsqu'il s'agit du spectre ou de la fonction de structure mais elle semble insuffisante pour prédire les moments statistiques de plus hauts degrés [69]. En ce qui concerne les effets optiques de la turbulence sur des échelles spatiales équivalentes au domaine inertiel de la turbulence cette théorie est néanmoins satisfaisante.

On discutera de manière très simplifiée une partie du raisonnement dimensionnel appliqué à la turbulence dans le domaine inertiel dans le chapitre consacré aux variations temporelles de la turbulence optique.

Il peut sembler un peu paradoxal à première vue de passer d'un raisonnement concernant des structures turbulentes de dimensions et durées finies à celui de composantes spectrales spatiales et temporelles [175]. Cet apparent paradoxe se lève intuitivement en considérant comment sont décrites les distributions

spatiale et temporelle aléatoires des structures turbulentes par décomposition spectrale entre autres.

Les fluctuations de vitesse dans l'air sont accompagnées de fluctuations de pression, température et humidité. L'indice de réfraction dans l'air dépend de la température et de la concentration d'humidité [164], ce qui fait que la turbulence induit des variations spatiales et temporelles de l'indice de réfraction. Dans le cas des observations astronomiques qui sont le plus souvent basées sur des propagations lumineuses quasi-verticales, les fluctuations d'indice de réfraction sont au premier ordre quasiment insensibles aux variations d'humidité et sont donc presque exclusivement dépendantes des fluctuations de température [46]. Il a été ainsi démontré par Obukhov [174, 80, 147, 151] que la densité spectrale spatiale tridimensionnelle des fluctuations d'indice de réfraction était donnée dans le domaine inertiel par

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \quad (1.8)$$

où $\vec{\kappa}$ est le vecteur d'onde spatial tridimensionnel.

C_n^2 est la constante de structure des fluctuations d'indice de réfraction.

On notera que même pour des conditions de température et pression absolues identiques, les variations d'indice de réfraction en amplitude dépendront aussi de la longueur d'onde du rayonnement concerné [164].

Il peut être noté également que les fluctuations de l'indice de réfraction sont malgré tout sensibles aux fluctuations de l'humidité dans l'infrarouge mais aussi dans le visible [64, 38]. On considérera de toute façon les fluctuations de l'indice de réfraction quelle que soit leur origine (avec ou sans fluctuations de l'humidité) et comme on s'intéressera aussi aux distorsions du spectre par rapport à celui de Kolmogorov, l'éventuelle distorsion du spectre par la contribution des fluctuations de l'humidité (s'il y a) sera prise en compte de manière expérimentale. Il semblerait à première vue qu'une telle éventualité puisse être ignorée et que les distorsions liées aux échelles de turbulence soient beaucoup plus pertinentes.

Dans la vie réelle, celle qui concerne l'observation astronomique, on est concerné par des échelles spatiales qui dépassent celle du domaine inertiel. Des affinements nécessitant l'application de certaines distorsions sur la densité spectrale des fluctuations d'indice de réfraction sont possibles afin de mieux coller aux conditions expérimentales.

1.2.3 La densité spectrale des fluctuations de l'indice de réfraction

Le modèle de Kolmogorov-Obukhov des fluctuations d'indice de réfraction est valide dans le domaine inertiel où s'opère la cascade d'énergie en l'absence d'injection directe d'énergie ou de dissipation visqueuse comme on a vu. À mesure que l'on s'approche en fréquence spatiale (en nombre d'onde pour l'instant) des échelles d'injection et de dissipation, la loi en $\kappa^{-11/3}$ de la densité spectrale des fluctuations d'indice de réfraction perd de sa pertinence et de sa validité. Il faut donc un modèle spectral qui colle mieux à la réalité physique.

Il n'existe pas vraiment de modèle théorique pour la turbulence au delà du domaine inertiel. On peut se baser néanmoins sur des considérations physiques générales pour aboutir à des modèles plus ou moins réalistes, le mieux étant bien sûr de s'appuyer sur des données expérimentales réelles.

Considérons tout d'abord les basses fréquences au voisinage de l'échelle d'injection. On peut schématiquement imaginer que l'énergie cinétique injectée à la turbulence va se répartir de manière plus ou moins égale sur les grandes structures turbulentes. Il s'ensuit que lorsqu'on s'approche de ces échelles il se produit un adoucissement de la pente de la densité spectrale jusqu'à saturation. On peut définir un paramètre L_0 qui représente l'échelle spatiale qui marque une limite supérieure du domaine inertiel et une transition vers la saturation du spectre aux plus basses fréquences. L_0 est l'échelle externe des fluctuations d'indice de réfraction.

Il faut remarquer que l'on fait l'hypothèse que la turbulence reste isotrope au delà de l'échelle externe, ce qui n'est peut être pas toujours vrai du point de vue de la turbulence optique. Cette question doit être examinée de près. En effet, les échelles d'injection gardent dans leur statistique la trace de l'anisotropie des causes excitatrices de la turbulence. Et on ne sait pas non plus décrire la statistique de la turbulence au delà de ces échelles. On se contentera du point de vue de la turbulence optique de cette hypothèse d'isotropie tout en gardant en tête la possibilité d'anisotropie de la turbulence au delà de l'échelle externe. Nous gardons aussi à l'esprit que l'échelle externe peut éventuellement dépendre de la longueur d'onde du rayonnement considéré, bien qu'il n'existe pas encore de données expérimentales à ce sujet.

L'expression générale de la densité spectrale isotrope tridimensionnelle des fluctuations d'indice de réfraction peut s'écrire selon deux formes [187] dont la première s'écrit comme

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033[2\pi]^3 C_n^2 \kappa^{-11/3} [1 - func(\kappa, L_0)] \quad (1.9)$$

où la fonction $func(\kappa, L_0)$ s'annule lorsque $\kappa L_0 \rightarrow 0$. Elle doit aussi obéir à certains critères de convergence liés à la variance finie des fluctuations.

Cette écriture a l'avantage de séparer formellement le spectre de Kolmogorov du terme de correction lié à l'échelle externe, ce qui permet une interprétation physique directe des résultats.

Le modèle exponentiel entre dans cette catégorie. Il s'écrit

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033[2\pi]^3 C_n^2 \kappa^{-11/3} [1 - \exp\{-[\kappa L_0]^2\}] \quad (1.10)$$

La deuxième expression générale de la densité spectrale s'écrit [187]

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033[2\pi]^3 C_n^2 \kappa^{-\alpha} [\kappa^\beta + \frac{Const}{L_0^\beta}]^{-\gamma} \quad (1.11)$$

où α , β et γ sont des paramètres positifs qui satisfont les conditions $\alpha + \beta\gamma = 11/3$ pour la compatibilité avec le modèle de Kolmogorov aux hautes fréquences et $\alpha < 1/\beta\gamma + 2$ pour assurer une variance finie des fluctuations [187].

Dans cette deuxième catégorie, les deux modèles qui sont le plus communément utilisés sont le modèle de von Kàrmàn, donné par

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033[2\pi]^3 C_n^2 [\kappa^2 + [\frac{2\pi}{L_0}]^2]^{-11/6} \quad (1.12)$$

et le modèle de Greenwood-Tarazano qui est donné par

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033[2\pi]^3 C_n^2 [\kappa^2 + \frac{2\pi\kappa}{L_0}]^{-11/6}. \quad (1.13)$$

On utilisera a priori le modèle de von Kàrmàn dans toutes les applications à la turbulence optique en attendant de le réajuster par rapport à des données expérimentales actualisées.

Au niveau des échelles de dissipation, la turbulence tend à disparaître car l'énergie cinétique y est transformée en chaleur. Il s'ensuit une atténuation rapide du spectre au niveau d'une échelle l_0 qui est ici l'échelle interne des fluctuations d'indice de réfraction.

Combiné au modèle de von Kàrmàn, l'effet de l'échelle interne a été formalisé au niveau de la densité spectrale des fluctuations d'indice de réfraction par l'expression [174]

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033[2\pi]^3 C_n^2 [\kappa^2 + [\frac{2\pi}{L_0}]^2]^{-11/6} \exp\{-[\frac{l_0\kappa}{5.92}]^2\} \quad (1.14)$$

En prenant en compte l'observation expérimentale d'un "bump" d'énergie dans le spectre des fluctuations de température [81], l'expression de la densité spectrale isotrope tridimensionnelle des fluctuations d'indice de réfraction dans le modèle combiné de von Kàrmàn et Hill-Andrews [84] est donnée par

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0.033[2\pi]^3 C_n^2 [1 + 1.802[\frac{l_0\kappa}{3.3}] - 0.254[\frac{l_0\kappa}{3.3}]^{7/6}] \frac{\exp\{-[\frac{l_0\kappa}{3.3}]^2\}}{[\kappa^2 + [\frac{2\pi}{L_0}]^2]^{11/6}} \quad (1.15)$$

Les propriétés statistiques des fluctuations d'indice de réfraction ainsi définies déterminent les propriétés statistiques des rayonnements qui se propagent à travers la turbulence.

1.3 La "turbulence optique"

La turbulence optique peut se définir comme étant le comportement de la lumière lorsqu'elle se propage à travers un milieu turbulent. En effet, on a vu que la turbulence induisait des variations spatiales et temporelles du champ d'indice de réfraction. Lorsqu'une onde lumineuse traverse un tel milieu, il s'ensuit des variations aléatoires et localement imprédictibles dans sa phase et son intensité, tant spatialement que temporellement. Les propriétés statistiques et spectrales des fluctuations d'indice de réfraction permettent également une description statistique et spectrale des perturbations que subit la lumière, et qui affectent

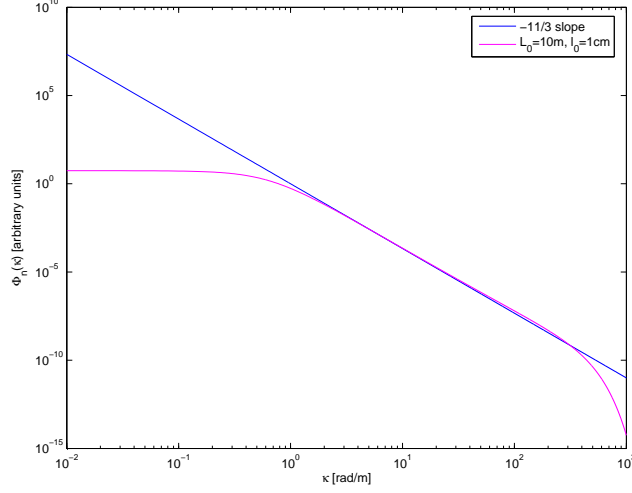


FIG. 1.3 — Tracé de la densité spectrale isotrope tridimensionnelle des fluctuations d'indice de réfraction dans un repère log-log où sont représentés les deux cas du modèle de Kolmogorov-Obukhov pour une échelle externe infinie et une échelle interne nulle, et le modèle de von Kármán pour une échelle externe finie couplé au modèle de Hill-Andrews pour l'échelle interne.

les images des objets célestes que l'on obtient au sol. Les variations d'indice de réfraction sont de l'ordre du millionnième et pour la propagation quasi-verticale qui concerne l'observation astronomique, les perturbations affectant les ondes lumineuses peuvent être considérées comme suffisamment faibles pour permettre l'adoption d'un modèle perturbatif au premier ordre qui décrit d'une manière assez simple la turbulence optique.

1.3.1 Propagation optique à travers la turbulence

On considère une onde électromagnétique se propageant à travers la turbulence atmosphérique terrestre. Dans le domaine visible, les échelles temporelles des variations dues à la turbulence sont beaucoup plus importantes que les périodes de pulsation temporelle des ondes électromagnétiques. On peut alors considérer que les ondes se propagent dans un milieu stationnaire avec des variations temporelles lentes et adiabatiques. Il est possible de traiter séparément (par analyse de Fourier temporelle) les composantes monochromatiques de ce rayonnement.

Considérant une composante monochromatique de longueur d'onde λ donnée, la loi de propagation [27] spatiale obéit formellement à

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \left[\frac{2\pi}{\lambda} \right]^2 [1 + n(\vec{r})]^2 \vec{E}(\vec{r}) + 2\nabla \left[\vec{E}(\vec{r}) \nabla \ln\{1 + n(\vec{r})\} \right] = 0 \quad (1.16)$$

où \vec{r} est pour l'instant le vecteur position spatiale tridimensionnel et $\vec{E}(\vec{r})$ la distribution spatiale du champ électrique. On a aussi considéré que l'indice de réfraction moyen était indépendant de la longueur d'onde et qu'il était égal à 1. Cependant le terme $n(\vec{r})$ qui décrit les fluctuations spatiales de l'indice de réfraction au moment du passage de l'onde dépend lui de la longueur d'onde.

Comme la longueur d'onde est très petite devant les plus petites échelles spatiales de variation de l'indice de réfraction, il s'ensuit que les effets de dépolarisation, exprimés par le dernier terme de l'équation précédente sont négligeables. On peut considérer une composante scalaire $E(\vec{r})$ du champ électrique qui obéit à l'équation de propagation de Helmholtz dans un milieu non-homogène :

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + \left[\frac{2\pi}{\lambda} \right]^2 [1 + n(\vec{r})]^2 E(\vec{r}) = 0 \quad (1.17)$$

En se propageant à travers la turbulence, l'onde subit de faibles perturbations. En effet, une onde plane arrivant d'un point source à l'infini (ou presque) conserve sa structure générale et si elle est initialement verticale par exemple, elle garde sa verticalité tout en subissant de légères perturbations de phase et d'intensité. Il est possible de recourir à des méthodes perturbatives pour décrire la propagation à travers la turbulence. La méthode la plus utilisée est celle de Rytov [27]. C'est une décomposition en perturbations multiplicatives de l'amplitude complexe du champ électrique par rapport à la solution non perturbée par la turbulence atmosphérique. On ne considère dans le cadre de l'approximation des douces perturbations (*smooth perturbations*) que le premier terme perturbatif de la décomposition de Rytov [172, 174]. Ceci équivaut à considérer l'onde non-perturbée comme une onde porteuse et la perturbation comme une modulation spatiale complexe de cette onde.

Soit $E_{np}(\vec{r})$ la solution de l'équation de propagation en cas d'absence de turbulence dans l'atmosphère. Dans le cas d'un point source à l'infini c'est une onde plane monochromatique. On peut l'écrire sous la forme

$$E_{np}(\vec{r}) = A_{np}(\vec{r}) \exp \{ i\varphi_{np}(\vec{r}) \} \quad (1.18)$$

où $A_{np}(\vec{r})$ est l'amplitude et $\varphi_{np}(\vec{r})$ la phase de cette onde non-perturbée.

On écrira de la même manière l'onde perturbée par la turbulence $E_p(\vec{r})$

$$E_p(\vec{r}) = A_p(\vec{r}) \exp \{ i\varphi_p(\vec{r}) \} \quad (1.19)$$

La perturbation de l'onde électrique (on peut dire aussi l'onde optique scalaire!) est une fonction complexe qui est donnée par

$$E_p(\vec{r}) = E_{np}(\vec{r}) \exp \{ \chi(\vec{r}) + i\varphi(\vec{r}) \} \quad (1.20)$$

$\varphi(\vec{r})$ est le champ spatial des fluctuations de phase qu'introduisent les variations d'indice de réfraction le long du chemin optique de propagation. Il est donné par

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_p(\vec{r}) - \varphi_{np}(\vec{r}) \quad (1.21)$$

$\chi(\vec{r})$ est le champ spatial des fluctuations de la log-amplitude (le logarithme de l'amplitude). Il est essentiellement dû à la diffraction à travers la turbulence et est donné par

$$\chi(\vec{r}) = \ln \left\{ \frac{A_p(\vec{r})}{A_{np}(\vec{r})} \right\} \quad (1.22)$$

Les fluctuations de la log-amplitude sont responsables des fluctuations d'intensité (scintillation) des images d'étoiles [54, 54, 54, 5], l'intensité étant le module au carré de l'amplitude perturbée par la turbulence, et partiellement responsables des variations d'intensité dans les images d'objets étendus tel le Soleil, ce qu'on discutera plus loin.

Les propriétés statistiques des fluctuations de phase et de log-amplitude sont liées aux propriétés statistiques des fluctuations d'indice de réfraction à travers les équations de propagation. Il existe une approche directe pour résoudre ces équations à la lumière de la méthode de Rytov avec les fonctions de Green, méthode utilisée par Tatarski et Chernov [172, 107, 174, 164]. Il existe aussi une approche plus phénoménologique qui s'appuie sur le caractère stratifié de la turbulence atmosphérique [184, 146, 157, 9]. Cette méthode se prête plus facilement à une interprétation physique des processus de propagation et conduit formellement aux mêmes résultats [147, 151, 120].

1.3.2 Propagation à travers les couches turbulentes de l'atmosphère

La turbulence dans la haute atmosphère se présente sous forme de couches horizontales statistiquement indépendantes. Cette stratification de la turbulence est due au fait que ces couches sont générées, entre autres, par les mouvements horizontaux différentiels de l'air [9, 186]. La turbulence dans la couche limite est aussi créée par le déplacement du vent par rapport au sol, autour des obstacles, et aux mouvements de convection.

Considérons une couche turbulente fine d'épaisseur δh à une hauteur h donnée. Une onde abordant verticalement (ou presque) cette couche y acquerra un déphasage $\varphi(\vec{r})$ à cause des variations d'indice de réfraction à l'intérieur de la couche. \vec{r} est maintenant le vecteur bidimensionnel de position perpendiculaire au sens de la propagation, ou du moins le vecteur position qui est perpendiculaire à l'axe optique du télescope. On néglige la diffraction à l'intérieur de la couche turbulente devant celle qui se produit à la sortie de la couche. On écrira

$$\varphi_h(\vec{r}) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \int_h^{h+\delta h} \frac{dh'}{\zeta} n(\vec{r}, h') \quad (1.23)$$

ζ est un facteur lié à la masse d'air traversée par la lumière dans la couche turbulente. Il est donné par le Cosinus de l'angle zénithal [147].

$\varphi_h(\vec{r})$ est le champ des fluctuations de phase induites par une couche à la hauteur h selon la direction définie par l'angle zénithal considéré.

Si le champ optique à l'entrée de la couche est décrit par une amplitude complexe $E_{h+\delta h}(\vec{r})$ alors l'amplitude complexe à la sortie de la couche $E_h(\vec{r})$ est donnée par

$$E_h(\vec{r}) = E_{h+\delta h}(\vec{r}) \exp \{i\varphi_h(\vec{r})\} \quad (1.24)$$

La propagation de la sortie de la couche turbulente au sol est une propagation libre qui peut se modéliser dans l'approximation paraxiale par la diffraction de Fresnel. En effet, chaque point de l'onde optique à la sortie de la couche turbulente est la source d'une onde de Huyghens dont la projection au sol est donnée par l'amplitude complexe de Fresnel [132]. L'onde optique qui arrive sur la couche turbulente subit un déphasage $\varphi_h(\vec{r})$ puis une diffraction de Fresnel jusqu'au sol [147]. L'amplitude complexe du champ optique au sol $E_0(\vec{r})$ est donnée par [147, 82]

$$E_0(\vec{r}) = E_{h+\delta h}(\vec{r}) \exp \{i\varphi_h(\vec{r})\} \otimes \left[\frac{\zeta}{i\lambda h} \exp \left\{ i\pi \frac{\zeta r^2}{\lambda h} \right\} \right] \quad (1.25)$$

Dans cette écriture le symbole \otimes marque le produit de convolution par rapport au vecteur bidimensionnel de position \vec{r} . On a omis d'écrire dans le terme de convolution le terme de phase linéaire $\exp \{-2\pi i h / [\zeta \lambda]\}$ qui marque la propagation d'une onde plane sur une distance h car seules les fluctuations de phase nous intéressent et non pas la valeur absolue de la phase. Il en est de même pour l'amplitude complexe initiale $E_{h+\delta h}(\vec{r})$ où l'on ne s'intéresse qu'à l'amplitude de l'onde car sa phase peut être quelconque. On peut ainsi passer à une autre notation où l'on ignore complètement la phase linéaire (phase homogène en \vec{r} qui ne dépend que de l'altitude h et d'une phase arbitraire associée à l'onde avant qu'elle ne rencontre la turbulence) et où l'amplitude complexe au sol est donnée par $A_{h+\delta h}(\vec{r}) \otimes \Psi_0(\vec{r})$ où $A_{h+\delta h}$ est l'amplitude de l'onde avant de rencontrer la couche turbulente, et $\Psi_0(\vec{r})$ le champ spatial bidimensionnel des fluctuations de l'amplitude complexe. Celui-ci est donné par

$$\Psi_0(\vec{r}) = \exp \{i\varphi_h(\vec{r})\} \otimes \left[\frac{\zeta}{i\lambda h} \exp \left\{ i\pi \frac{\zeta r^2}{\lambda h} \right\} \right] \quad (1.26)$$

Dans le cas où la turbulence est localisée dans de très fines couches à des hauteurs h avec de faibles fluctuations de phase $\varphi_h(\vec{r})$ au niveau de chacune d'elles (typiquement $|\varphi_h(\vec{r})| \ll 1$) il est possible d'écrire les fluctuations de phase $\varphi_0(\vec{r})$ et de log-amplitude $\chi_0(\vec{r})$ au sol sous la forme [147, 26]

$$\varphi_0(\vec{r}) \approx \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\zeta} \varphi_h(\vec{r}) \otimes \left[\frac{\zeta}{\lambda h} \sin \left\{ \pi \frac{\zeta r^2}{\lambda h} \right\} \right] \quad (1.27)$$

$$\chi_0(\vec{r}) \approx \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\zeta} \varphi_h(\vec{r}) \otimes \left[\frac{\zeta}{\lambda h} \cos \left\{ \pi \frac{\zeta r^2}{\lambda h} \right\} \right] \quad (1.28)$$

Et aussi pour les fluctuations spatiales de l'amplitude complexe au sol [147]

$$\Psi_0(\vec{r}) \approx \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\zeta} \exp \{i\varphi_h(\vec{r})\} \otimes \left[\frac{\zeta}{i\lambda h} \exp \left\{ i\pi \frac{\zeta r^2}{\lambda h} \right\} \right] \quad (1.29)$$

On arrive ainsi à décrire les fluctuations de l'amplitude complexe, de la phase ou de la log-amplitude au sol en fonction des déphasages induits par les couches turbulentes le long du chemin optique de l'onde optique. Ce sont donc les caractéristiques statistiques et spectrales des fluctuations de phase qui vont déterminer celles de la turbulence optique au sol [26].

1.3.3 Densités spectrales spatiales des perturbations optiques

A partir du paragraphe précédent, si $W_{\varphi,h}(\vec{f})$ est la densité spectrale des fluctuations de phase au niveau d'une couche turbulente à la hauteur h , alors la densité spectrale des fluctuations de phase au sol $W_{\varphi,0}(\vec{f})$ est donnée par

$$W_{\varphi,0}(\vec{f}) = W_{\varphi,h}(\vec{f}) \cos^2 \left\{ \lambda\pi \frac{h}{\zeta} f^2 \right\} \quad (1.30)$$

De même, la densité spectrale des fluctuations de la log-amplitude au sol $W_{\chi,0}(\vec{f})$ est donnée par

$$W_{\chi,0}(\vec{f}) = W_{\varphi,h}(\vec{f}) \sin^2 \left\{ \lambda\pi \frac{h}{\zeta} f^2 \right\} \quad (1.31)$$

Les fluctuations d'indice de réfraction dans une couche turbulente induisent un déphasage aléatoire, et celui-ci induit par diffraction des variations de phase et d'amplitude au sol, il est donc possible de caractériser ces dernières à partir des propriétés statistiques et spectrales de la turbulence.

La densité spectrale $W_{\varphi,h}(\vec{f})$ des fluctuations de phase induites par une couche turbulente à une hauteur h et d'épaisseur δh dont les fluctuations d'indice de réfraction sont caractérisées par une densité spectrale tridimensionnelle $\Phi_n(\vec{\kappa}) = \Phi_n(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ peut se déduire [147, 151, 26] par

$$W_{\varphi,h}(\vec{f}) = \frac{\delta h}{\zeta} \left[\frac{2\pi}{\lambda^2} \right] \Phi_n(\kappa_x, \kappa_y, 0) \quad (1.32)$$

où \vec{f} est le vecteur bidimensionnel de fréquence spatiale associé aux coordonnées spatiales dans le plan perpendiculaire à l'axe optique.

Ainsi, à partir de l'équation 1.15, la densité spectrale spatiale bidimensionnelle des fluctuations de phase induites à la sortie d'une couche turbulente à une hauteur h dans le modèle combiné de von Kàrmàn et Hill-Andrews est donnée par [84, 88]

$$W_{\varphi,h}(\vec{f}) \approx 0.3827 \left[\frac{C_n^2(h)\delta h}{\zeta} \right] \left[\frac{1}{\lambda^2} \right] \left[f^2 + \left[\frac{1}{L_0(h)} \right]^2 \right]^{-11/6}$$

$$[1 + 3.4310l_0(h)f - 0.5384[l_0(h)f]^{7/6}] \exp \left\{ -\left[\frac{2\pi l_0(h)f}{3.3}\right]^2 \right\} \quad (1.33)$$

Ayant ainsi des modèles décrivant les propriétés du rayonnement arrivant au sol, il est possible de modéliser les images astronomiques obtenues à travers la turbulence atmosphérique.

1.3.4 Formation des images à travers la turbulence

On a brièvement vu dans ce qui précède que l'on pouvait modéliser les perturbations que subit la lumière lorsqu'elle se propage à travers la turbulence atmosphérique dans la limite des approximations applicables à l'observation astronomique. Dans cette optique, considérons encore le cas d'une étoile faisant office de source ponctuelle à l'infini. A une phase homogène près, la distribution spatiale au niveau de la pupille d'entrée de l'amplitude complexe de l'onde optique arrivant avec un angle (bidimensionnel) $\vec{\theta}_0$ par rapport à l'axe optique du télescope peut être donnée par $A_{\vec{\theta}_0} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r})$ où $A_{\vec{\theta}_0}$ est l'amplitude non perturbée de l'onde. $I_{\vec{\theta}_0} = A_{\vec{\theta}_0}^2$ est l'intensité de l'onde associée, pour la longueur d'onde considérée, à l'intensité du point source dans la direction $\vec{\theta}_0$. $\Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r})$ représente les fluctuations affectant l'amplitude complexe à cause de la traversée de la turbulence atmosphérique.

Traversant la pupille du télescope, le rayonnement subit une diffraction. C'est le produit de cette diffraction qui est focalisé par l'optique du télescope pour former l'image de l'objet observé. La diffraction à travers la pupille d'un télescope est suffisamment bien décrite par l'approximation de Fraunhofer [27]. Le résultat de la diffraction est une distribution angulaire d'amplitude complexe $ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta})$ après diffraction, c'est l'ASF (*Amplitude Spread Function*). Elle est donnée par

$$ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) \propto \int d\vec{r} A_{\vec{\theta}_0} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r}) G(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\theta} \cdot \vec{r} \right\} \quad (1.34)$$

où $G(\vec{r})$ est la fonction de transmission spatiale en amplitude de la pupille. On la prise réelle ici mais elle peut être complexe aussi pour prendre en compte les aberrations en phase du télescope. $\vec{\theta}_0$ est la direction du point source par rapport à l'axe optique du télescope. L'information sur la position moyenne de l'étoile par rapport à l'axe optique est exprimée par $\Psi_{\vec{\theta}_0}$.

La distribution angulaire de l'intensité associée à cette ASF est la fonction d'étalement du point PSF (*Point Spread Function*) ou la réponse impulsionnelle, image du point-source à travers un instrument donné (caractérisé par sa fonction pupille) et pour une configuration donnée de la turbulence optique (donnée par $\Psi_{\vec{\theta}_0}$). La PSF $PSF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta})$ associée à la direction $\vec{\theta}_0$ est donnée par

$$PSF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) = \left| ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) \right|^2 \quad (1.35)$$

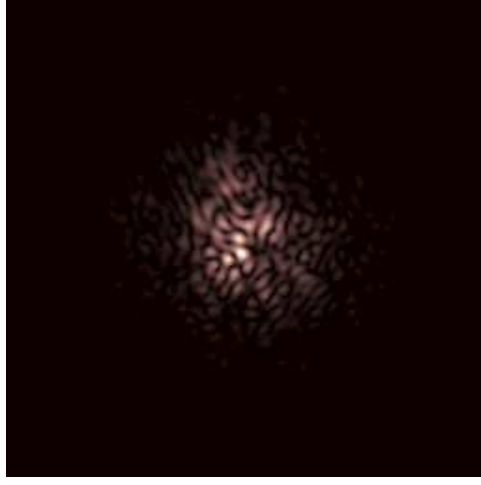


FIG. 1.4 – Cette tache éclatée est ce à quoi ressemble une figure de *speckles*, image d'une étoile non-résolue par le télescope observée à travers la turbulence terrestre. Cette figure a été obtenue par simulation numérique. Cette simulation correspond à un télescope avec une pupille d'entrée de diamètre $D=1\text{m}$ avec une obstruction centrale de diamètre $D'=35\text{cm}$. Les paramètres de la turbulence optique par rapport au modèle de von Kàrmàn sont $\left[\frac{C_n^2(h)\delta h}{\zeta}\right]=1.2 \cdot 10^{-12}\text{m}^{1/3}$ et $L_0=10\text{m}$. La longueur d'onde du rayonnement est $\lambda=550\text{nm}$.

La réponse impulsionnelle en présence de turbulence optique est de par les fluctuations d'amplitude complexe, un mélange de fluctuations de phase et d'amplitude comme on a vu, une configuration lumineuse tavelée qu'on appelle une figure de "*speckles*". La Figure 1.4 montre une figure de speckles qu'on obtient par simulation numérique (dont on parlera un peu plus loin). On ne s'occupe ici que des effets optiques et on laissera de côté les considérations de pixelisation (échantillonnage + moyenne) et photonisation.

Lorsqu'on observe un objet étendu, ou une distribution angulaire d'objets ponctuels dans le ciel, les rayonnements issus des différentes directions $\vec{\theta}_0$ sont optiquement incohérents et n'interfèrent pas. L'image qu'on obtient est une superposition en intensité des contributions de chaque point-source (chaque point-source donnant une PSF propre) et dont l'image en distribution angulaire d'intensité qu'on obtient avec un télescope $I(\vec{\theta})$ est donnée par

$$I(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}_0 PSF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) \quad (1.36)$$

Chaque PSF contient l'information sur la l'intensité de la source dans la direction $\vec{\theta}_0$. On peut aussi définir une PSF normalisée par l'intensité de la source $PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta})$ de telle sorte que l'on puisse écrire $PSF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) = I(\vec{\theta}_0)PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta})$

où $I(\vec{\theta}_0) = \frac{A^2}{\theta_0}$. Dans ce cas l'image observée est donnée plus classiquement par

$$I(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}_0 I_0(\vec{\theta}_0) PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta}) \quad (1.37)$$

On peut donc modéliser l'image instantanée du Soleil par exemple telle qu'obtenue pour une configuration donnée de la turbulence optique. On reviendra sur ce point un peu plus loin.

1.3.5 Les PSF longue-pose

En longue pose, la PSF résulte d'une accumulation, ou si on normalise par le temps d'exposition, de la moyenne temporelle de PSF instantanées à différents instants. La moyenne temporelle du processus aléatoire (et imprédictible) qu'est la variation temporelle de la PSF instantanée est équivalente à une moyenne statistique si l'on considère le cas limite d'un temps d'exposition infini. On écrira la PSF longue-pose normalisée par rapport à l'intensité de sa source sous la forme

$$PSF_{\vec{\theta}_0}^{LP}(\vec{\theta}) = \left\langle \left| PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta}) \right|^2 \right\rangle \quad (1.38)$$

On suppose que l'instrument reste parfaitement centré par rapport au point source et qu'il n'est affecté ni de dérives de suivi ni de vibrations [4].

Il faut remarquer que la longue pose ici est mathématiquement équivalente à un temps d'exposition infini durant lequel la PSF longue pose se forme par accumulation continue de toutes les configurations possibles de PSF instantanées. En pratique on parlera de longue pose lorsque le temps d'exposition est suffisamment important pour permettre une accumulation suffisante de PSF instantanées pour engendrer une PSF lisse et symétrique sous forme d'une tache unique où l'aspect en tavelures (*speckles*) des PSF courte-pose a disparu. Il s'agit du temps durant lequel la formation de la PSF longue pose se stabilise suffisamment. Cela arrive lorsque le temps d'exposition est très grand devant le temps de cohérence des figures de *speckles* en ce qui concerne la variation temporelle des PSF instantanées, ou de manière équivalente de la variation temporelle des fluctuations du front d'onde à la pupille d'entrée du télescope.

Si on met de côté les considérations relatives aux différences de masse d'air traversée et à la réfraction différentielle, il existe un domaine angulaire où la PSF moyenne obtenue en longue pose est indépendante de la direction de la source. Ce domaine angulaire d'isotropie des effets de la turbulence optique est le domaine isoplanétique. On peut écrire en effet

$$PSF_{\vec{\theta}_0}^{LP}(\vec{\theta}) = PSF^{LP}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \quad (1.39)$$

où l'on a enlevé la dépendance en $\vec{\theta}_0$ et où $PSF^{LP}(\vec{\theta})$ est la PSF longue-pose obtenue pour une étoile se situant sur l'axe optique du télescope en prenant

$\theta_0 = 0$.

L'expression de la PSF longue pose isoplanétique s'écrit

$$PSF^{LP}(\vec{\theta}) = \frac{1}{S} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \left\langle \Psi(\vec{r}) \Psi^*(\vec{r}') \right\rangle G(\vec{r}) G(\vec{r}') \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\theta} [\vec{r} - \vec{r}'] \right\} \quad (1.40)$$

S est l'aire de surface de la pupille d'entrée. La normalisation de la PSF par S assure pour l'intensité une valeur 1.

Remarquons ici que si les fluctuations de l'amplitude complexe instantanée dépendent de la direction $\vec{\theta}_0$, c'est la moyenne statistique $\left\langle \Psi(\vec{r}) \Psi^*(\vec{r}') \right\rangle$ qui ne dépend pas de $\vec{\theta}_0$ et nous n'avons omis l'indice $\vec{\theta}_0$ dans les fluctuations d'amplitude complexe que pour simplifier l'écriture et pour souligner l'anisoplanétisme en longue pose. En effet, en faisant le changement de variables $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$ on peut écrire

$$PSF^{LP}(\vec{\theta}) = \frac{1}{S} \int d\vec{r} \int d\vec{R} B_{\Psi}(\vec{R}) G(\vec{r}) G(\vec{r} + \vec{R}) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\theta} \vec{R} \right\} \quad (1.41)$$

où l'on a

$$B_{\Psi}(\vec{R}) = \left\langle \Psi(\vec{r}) \Psi^*(\vec{r} + \vec{R}) \right\rangle \quad (1.42)$$

$B_{\Psi}(\vec{R})$ est la covariance spatiale des fluctuations de l'amplitude complexe qui est isotrope en \vec{R} tant que la turbulence est isotrope et supposée isoplanétique tant que la turbulence optique est statistiquement isotrope à travers le champ de vision de l'instrument.

Eclaircissons tout d'abord ce qu'on entend par isotropie statistique à travers le champ de vision. Imaginons deux étoiles à des hauteurs différentes au dessus de l'horizon. Le rayonnement des deux étoiles passe par des zones différentes de l'atmosphère turbulente et leurs PSF instantanées sont complètement différentes. Si on considère les propriétés statistiques en longue pose on aura aussi une différence parce que le rayonnement de l'étoile la plus basse traverse plus de turbulence sur son trajet que l'autre. Si les deux étoiles sont angulairement proches l'une de l'autre de manière à ce que les propriétés statistiques des effets affectant les deux rayonnements soient les mêmes alors on a isoplanétisme en longue pose. L'isotropie en \vec{R} par contre dépend de l'isotropie de la turbulence aux grandes échelles.

On peut réécrire la PSF longue-pose autrement

$$PSF^{LP}(\vec{\theta}) = \frac{1}{S} \int d\vec{R} B_{\Psi}(\vec{R}) \left[\int d\vec{r} G(\vec{r}) G(\vec{r} + \vec{R}) \right] \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\theta} \vec{R} \right\} \quad (1.43)$$

Dans ce cas si on met

$$Tp(\vec{R}) = \frac{1}{S} \int d\vec{r} G(\vec{r}) G(\vec{r} + \vec{R}) \quad (1.44)$$

qui peut être rapprochée de la fonction de transfert optique OTF (*Optical Transfer Function*) [147, 92, 151, 197, 42, 26], alors la PSF longue pose isoplanétique normalisée à l'intensité de la source est donnée par

$$PSF^{LP}(\vec{\theta}) = \int d\vec{R} B_{\Psi}(\vec{R}) Tp(\vec{R}) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\theta} \cdot \vec{R} \right\} \quad (1.45)$$

La forme de la PSF dépend donc de la forme de la fonction pupille à travers le terme $Tp(\vec{R})$ et des propriétés statistiques de la turbulence optique à travers la covariance spatiale des fluctuations d'amplitude complexe.

Concernant cette dernière, une propriété remarquable est que la fonction de covariance $B_{\Psi}(\vec{R})$ est invariante par diffraction de Fresnel. Cela veut dire que bien que l'on observe des fluctuations de phase et d'amplitude au sol, la covariance spatiale des fluctuations d'amplitude complexe au sol est la même que la covariance spatiale des fluctuations d'amplitude complexe à la sortie de la couche turbulente [147]. On rediscutera de cette propriété dans un autre chapitre plus loin.

Il se trouve d'un autre côté que si l'on ne tient compte que de la contribution d'une seule couche turbulence comme on l'a fait jusqu'à présent, la turbulence optique se réduit aux fluctuations de phase $\varphi_h(\vec{r})$ qui sont introduites par la propagation à travers la fine couche turbulente en question.

Les fluctuations de phase acquièrent une statistique gaussienne en traversant les zones décorréliées des fluctuations d'indice de réfraction dans la couche turbulente [147]. Ceci permet d'exprimer la covariance spatiale des fluctuations d'amplitude complexe en fonction de la fonction de structure des fluctuations de phase non affectées par la diffraction [151, 26]. On peut écrire

$$B_{\Psi}(\vec{R}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_{\varphi,h}(\vec{R}) \right\} \quad (1.46)$$

où $D_{\varphi,h}(\vec{R})$ est définie comme

$$D_{\varphi,h}(\vec{R}) = \left\langle \left| \varphi_h(\vec{r}) - \varphi_h(\vec{r} + \vec{R}) \right|^2 \right\rangle \quad (1.47)$$

On suppose que la fonction de structure est isotrope aux échelles spatiales considérées (on écrit $D_{\varphi}(\vec{R}) = D_{\varphi}(R)$) et par conséquent la densité spectrale spatiale des fluctuations de phase sans diffraction, en fonction de laquelle s'écrit la fonction de structure comme

$$D_{\varphi,h}(R) = 4\pi \int_0^{\infty} df f W_{\varphi,h}(f) [1 - J_0 \{2\pi f R\}] \quad (1.48)$$

où $J_0 \{X\}$ est la fonction de Bessel de première espèce à l'ordre 0.

Dans le cas d'une turbulence anisotrope on utilisera la transformation de Fourier bidimensionnelle pour tenir compte de l'anisotropie de la densité spectrale.

Arrivé là on peut supposer que les fluctuations de phase obéissent aux modèles de von Kàrmàn et Hill-Andrews sans tenir compte bien sur de la diffraction, mais cela n'est pas crucial car il est possible d'utiliser le modèle que l'on veut en remplaçant simplement par la densité spectrale qu'il faut.

En première approximation on se contentera de l'effet de l'échelle externe [24, 25, 42] et pour ça on prendra

$$W_{\varphi,h}(\vec{f}) \approx 0.3827 \left[\frac{C_n^2(h)\delta h}{\zeta} \right] \left[\frac{1}{\lambda^2} \right] \left[f^2 + \left[\frac{1}{L_0(h)} \right]^2 \right]^{-11/6} \quad (1.49)$$

Nous avons ainsi de quoi calculer la covariance spatiale des fluctuations (isotropes) de l'amplitude complexe. Il ne manque plus que le terme $Tp(R)$.

Il est possible avec ces expressions d'obtenir la PSF longue-pose isoplanétique normalisée par l'intensité de la source. En pratique on a procédé autrement.

1.3.6 Le paramètre de Fried

La PSF longue pose dépend comme on l'a vu des propriétés de la turbulence optique et de celles de la pupille. Lorsque les dimensions de la pupille sont grandes devant l'échelle de cohérence spatiale de la turbulence optique, ce qui revient à ce que la PSF longue-pose soit très grande devant la PSF instrumentale en l'absence de turbulence optique (ou que la figure de *speckles* instantanée contient un grand nombre de petites taches) alors on peut considérer que l'image longue-pose est caractérisée par les propriétés statistiques de la turbulence optique indépendamment de la pupille. Si de plus l'échelle externe de la turbulence optique est très grande devant le diamètre de la pupille de telle sorte que l'on puisse y assimiler les propriétés statistiques de la turbulence optique à celle décrite avec le modèle de Kolmogorov, alors il est possible dans ces conditions de caractériser la dégradation des images longue-pose obtenues en présence de la turbulence optique avec un paramètre unique, le paramètre de Fried [65].

Supposons que l'on soit en présence de turbulence optique et que les images longue-pose en soient affectées à un certain degré. Le paramètre de Fried $r_0(\lambda)$ peut être défini comme étant le diamètre critique de la pupille circulaire (sans obstruction centrale) d'un télescope virtuel qui en l'absence de turbulence optique, donnerait le même pouvoir de résolution qu'un télescope d'un diamètre très supérieur en présence de la turbulence optique, si celle-ci est décrite par le modèle de Kolmogorov.

Le paramètre de Fried est lié à l'intégrale de la constante de structure le long de la ligne de visée [65, 151] et est donné pour toute longueur d'onde λ par

$$[r_0(\lambda)]^{-5/3} \approx 16.713 \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\zeta} C_n^2(h) \quad (1.50)$$

Ce n'est pas écrit explicitement mais la constante de structure des fluctuations d'indice de réfraction $C_n^2(h)$ dépend aussi de la longueur d'onde.

Le paramètre de Fried caractérise la PSF longue-pose dans le modèle de Kolmogorov lorsque l'effet de la pupille est négligeable. Il est lié dans ce cas à la largeur angulaire à mi-hauteur (*full width at half maximum*) de la PSF longue-pose $FWHM_{L_0 \gg D, r_0 \ll [D-D']}(\lambda)$, où D le diamètre de la pupille et D' le diamètre de l'obstruction centrale, par

$$FWHM_{L_0 \gg D, r_0 \ll [D-D']}(\lambda) \approx \frac{0.976\lambda}{r_0(\lambda)} \quad (1.51)$$

En effet, lorsque $r_0(\lambda)$ calculé par l'équation 1.50 est de l'ordre des dimensions de la pupille ou que celles-ci sont de l'ordre des distortions induites par l'échelle externe sur le spectre de Kolmogorov, alors le paramètre de Fried ne donne pas exactement la largeur à mi-hauteur de la PSF longue-pose car il faudra prendre en compte ces deux paramètres dans la modélisation de la PSF. On peut considérer dans le cas limite que formellement, le paramètre de Fried est une façon d'écrire l'intégrale de la constante de structure des fluctuations d'indice de réfraction le long de la ligne de visée, mais il faut remarquer néanmoins que dans la plupart des cas, les télescopes sont beaucoup plus grands que $r_0(\lambda)$, et que même si on peut observer une variation notable dans la largeur des PSF longue-pose en fonction de l'échelle externe tel qu'on peut le voir dans la figure 1.5, celle-ci reste inférieure à celle qui est causée par une variation de $r_0(\lambda)$, et notamment pour les petits télescopes. On considérera donc que les largeurs des PSF longue-pose sont déterminées par le paramètre de Fried $r_0(\lambda)$, par l'échelle externe de cohérence de la turbulence optique L_0 (en vérité il faut prendre en compte la distribution de l'échelle externe $L_0(h)$ le long de la ligne de visée) et de la pupille si celle-ci est petite. En toute rigueur il faut prendre en compte le modèle de turbulence optique pour chaque couche mais cela dépendra de la précision des mesures et les approximations envisagées jusqu'ici sont amplement suffisantes pour le reste des modélisations sauf si c'est discuté explicitement.

1.4 Conclusion

Sans se préoccuper des diverses techniques mises en œuvre aujourd'hui dans le domaine de l'astronomie à haute résolution angulaire, ont été passés en revue les principaux résultats standards de la théorie actuelle de la propagation lumineuse à travers la turbulence atmosphérique dans le cadre de l'observation astronomique visible et infrarouge.

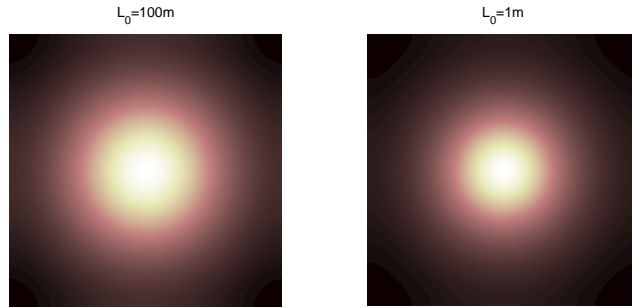


FIG. 1.5 – r_0 ne détermine pas à lui seul la largeur de la PSF en longue-pose. Ici l'effet de l'échelle externe L_0 pour une valeur du paramètre de Fried fixée à $r_0(550nm)=2$ cm. Plus l'échelle externe est petite est moins il y a d'énergie dans les basses fréquences de la turbulence optique et ceci se traduit par des PSF longue-pose légèrement plus étroites.

Chapitre 2

La mesure du diamètre solaire à partir des images longue-pose du Soleil

2.1 Les variabilités solaires

Dans le contexte historique actuel où se produisent des transformations climatiques notables sur des durées temporelles relativement courtes, il existe une controverse qui oppose schématiquement physiciens et astronomes d'un côté et d'un autre côté la communauté climatologique traditionnelle [93] sur les effets des variations de l'activité solaire sur le climat terrestre. L'opinion la plus répandue est la croyance en l'idée que l'influence de la variabilité solaire sur le changement climatique actuel est négligeable devant l'influence de l'accroissement de la concentration du CO_2 et autres gaz à effet de serre dans l'atmosphère. En effet, selon le modèle le plus simpliste, l'augmentation de la concentration du CO_2 à cause de la consommation industrielle des combustibles fossiles accentue la capture de l'énergie radiative du Soleil par effet de serre et conduit ainsi à un réchauffement progressif du climat. La hausse des températures moyennes (quoi qu'avec ce modèle on peut aussi avoir des variations localisées avec même des refroidissements moyens locaux) augmenterait le taux d'évaporation des océans et accélérerait le réchauffement climatique (la vapeur d'eau est un gaz à effet de serre plus efficace). Ce réchauffement est aussi renforcé par la libération du méthane piégé dans le sol. Cet effet de réchauffement est partiellement ralenti par une augmentation de l'albédo terrestre à cause de la couverture nuageuse consécutive à l'élévation du taux d'évaporation et aux aérosols dans l'atmosphère. Le climat terrestre est cependant beaucoup plus complexe que ça. C'est un système dynamique qui met en jeu un grand nombre de processus physiques et chimiques qui interagissent de manière non-linéaire avec des temps de réponse variés. Ceci rend les prédictions difficiles et les éventuels feedbacks difficiles à

prévoir. De plus, le Soleil en tant que source principale d'énergie sur Terre est un paramètre essentiel de la définition de la dynamique climatique sur celle-ci. A très longue échelle, les cycles glaciaires et interglaciaires de Milankovitch sont liés aux variations de l'insolation, distribution longitudinale et saisonnière de l'énergie solaire sur Terre, qui sont dues aux variations des paramètres orbitaux terrestres. Les variations à plus courte échelle dépendent de la réponse du climat aux variations temporelles et spatiales de l'énergie reçue du Soleil.

L'expression la plus évidente de la variation cyclique de l'activité solaire se décline sous la forme du cycle de Schwabe de période approximative de 11 ans du nombre de taches solaires (en fait la durée du cycle varie entre 8 et 17 ans [106]). Les variations cycliques du nombre de taches solaires sont liées aux variations d'énergie rayonnée par le Soleil, ainsi qu'aux fréquences des phénomènes éruptifs. A ce cycle se superposent d'autres cycles de variations plus longs [40] qui peuvent en partie s'expliquer par un couplage de la rotation du Soleil sur lui-même avec la rotation du Soleil autour du centre de masse du système solaire [102, 90]. Les variations de l'activité solaire peuvent aussi être considérées comme étant plutôt chaotiques que quasi-périodiques [60] à une longue échelle de temps mais il apparaît qu'il est possible de faire des prédictions sur les quelques prochains cycles d'activité solaire quant à leurs durées et intensités.

Bien qu'une corrélation ait été clairement établie entre les cycles d'activité solaire et les phénomènes climatiques [83, 67, 68], il n'est pas encore très clair comment interagit le climat terrestre avec les variations d'énergie injectée dans l'atmosphère.

L'énergie solaire est transmise par rayonnement électromagnétique et par rayonnement corpusculaire à travers le flux de plasma dans le vent solaire. Les variations de l'irradiance totale solaire (constante solaire) n'est que de l'ordre de 0.1% sur l'échelle du cycle solaire [75]. Même si cette variation peut en partie expliquer les variations climatiques introduites par le Soleil [139], elle est jugée faible pour induire des variations significatives [63], même si les interactions dynamiques ne sont pas bien comprises. En plus des variations de la constante solaire les variations du flux des rayonnements UV peuvent induire des processus d'assimilation différents par l'atmosphère, d'autant que l'amplitude de variation dans cette bande est beaucoup plus importante que pour la constante solaire [75, 105]. L'énergie du vent solaire est aussi transférée vers la Terre à travers les reconnections magnétiques et l'injection de particules chargées dans l'atmosphère [119, 103]. D'un autre côté les variations du vent solaire modulent le flux des rayonnements cosmiques sur Terre en influant sur la magnétosphère terrestre. Les variations de flux du rayonnement cosmique participent via une variation du taux d'ionisation dans la haute atmosphère à une variation de la couverture nuageuse moyenne [118, 93] et induit ainsi une variation importante de l'albédo terrestre. Ces mécanismes peuvent expliquer en partie l'action de la variabilité solaire sur le climat terrestre. Reste à savoir comment le climat y répond.

La corrélation entre la température moyenne annuelle de l'air continental dans l'hémisphère nord (Northern hemisphere land air temperature) avec la durée du cycle d'activité solaire (Solar Cycle Length) [106, 62, 176] est parmi

les plus parlantes en la matière. La température de l'air continental est choisie pour éviter les effets de l'inertie thermique des océans et la durée du cycle d'activité solaire est significative parce qu'il est montré qu'un cycle d'activité est d'autant plus court que l'activité est intense [10, 166] et que ça caractérise assez bien l'intensité des cycles solaires en terme énergétique.

L'observation, l'étude et éventuellement la prédiction des variations solaires à travers les variations de la constante solaire, du spectre rayonné et des événements éruptifs liés à l'activité solaire peuvent être complétées par la mesure d'éventuelles variations du diamètre solaire. Bien que de telles variations aient été mesurées, il existe des écarts fâcheux entre les mesures au sol par des instruments différents.

2.1.1 Les variations du diamètre solaire

Dans le cadre de la variabilité du Soleil et de ce que ça peut impliquer sur la vie terrestre, les variations cycliques et séculaires du diamètre du Soleil en rapport avec son activité énergétique est aujourd'hui un sujet vivement discuté. En effet, les mesures des variations du diamètre solaire par des instruments différents ont abouti à des résultats très contradictoires [180] et à des interprétations différentes. Ceci est d'autant plus gênant que la variabilité du diamètre solaire en fonction de l'activité peut renseigner sur les mécanismes de transport d'énergie dans le Soleil et sur les changements structurels accompagnant son activité magnétique [73]. Les mesures du diamètre solaire à partir du sol montrent le plus souvent une variation en opposition de phase avec l'activité solaire. Ceci est notamment le cas pour les mesures obtenues avec l'astrolabe solaire de l'observatoire de Calern [98, 51]. Cette tendance est soutenue par les mesures du diamètre solaire effectuées au moyen du *Solar Disk Sextant* (SDS) à bord de ballons stratosphérique [58]. Les variations en opposition de phase avec l'activité solaire (en terme de cycle de 11 ans) sont obtenues pour le continuum d'émission photosphérique. Le comportement du diamètre est différent lorsqu'il s'agit de l'observation de la photosphère à des longueurs d'onde correspondant à des lignes spectrales (et donc à des profondeurs d'émission différentes). Pour la ligne spectrale du fer neutre à $\lambda = 525$ nm par exemple, la variation du diamètre solaire est en phase avec l'activité solaire [182, 110]. Ces résultats semblent être appuyés aussi par des inversions de mesures héliosismologiques qui aboutissent à des variations de diamètre (diamètres de stratification en densité en dessous de la surface) en phase avec l'activité solaire pour des profondeurs de $0.97R_{\odot}$ à $0.99R_{\odot}$ et en opposition de phase au dessus de $0.99R_{\odot}$ (jusqu'à la surface) [111].

Il se trouve cependant qu'il existe aussi des mesures du diamètre solaire qui aboutissent à des résultats différents. Certains instruments au sol aboutissent à une variation du diamètre solaire qui est en phase avec l'activité solaire [137]. Le traitement des images prises à partir de l'espace, à bord de SOHO avec le *Michelson Doppler Imager*, donnent des variations insignifiantes par rapport à ce qui est mesuré au sol [59, 97].

Une telle disparité dans les résultats peut s'expliquer par la conjonction de

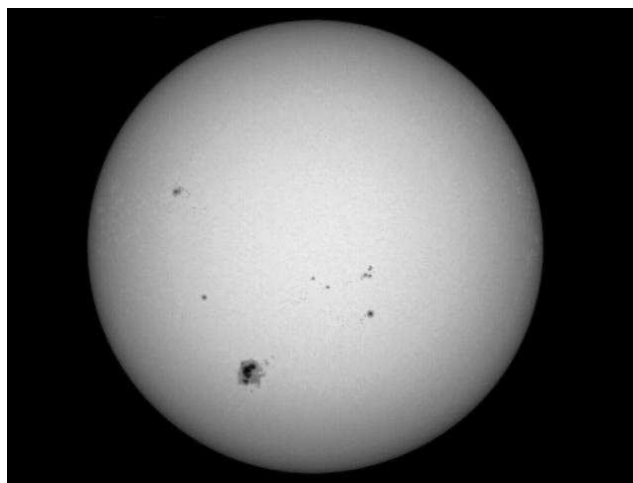


FIG. 2.1 – Le Soleil. Une image de la photosphère prise le 07 juin 1992 [201]. Le Soleil ne présente pas un éclairement uniforme mais un assombrissement du centre au bord du disque photosphérique. La détermination du bord et du diamètre en dépendent.

plusieurs facteurs. Tout d’abord, le Soleil est un corps fluide gazeux en équilibre hydrostatique qui n’a pas de diamètre physique bien déterminé. On peut définir des diamètres isobares ou isothermes par exemple, mais du fait de la semi-transparence de la photosphère, ce que l’on observe du Soleil est aussi une distribution de luminosité sans bord défini de manière absolue. On observe en effet un assombrissement continu du centre vers les limites du disque photosphérique (Figure 2.1). Le bord et donc le diamètre solaire apparent sont définis par convention à partir de cet assombrissement centre-bord. D’un autre côté, la fonction d’assombrissement centre-bord dépend de la longueur d’onde (Paragraphe 2.2.1), ce qui est d’autant plus gênant que les variations de diamètre peuvent être issues de restructurations physiques différentes et peuvent donner des variations différentes. Les instruments au sol et dans l’espace sont différents, avec tout ce que cela peut comporter de biais de mesure (identifiés ou non). Ils observent à des longueurs d’onde différentes et traitent les images de manières différentes. Dans de telles conditions l’intercalibration et la comparaison des données ne sont pas possibles. On peut dire que chaque instrument mesure son propre diamètre solaire. Il y a enfin la turbulence optique. Bien que celle-ci ne pose pas de problème dans l’espace, elle peut être considérée comme un facteur limitant la pertinence des mesures au sol. En effet, il se peut que le diamètre du Soleil varie (ou non) avec le cycle solaire (ou autres cycles et variations séculaires) mais les mesures au sol subissent systématiquement la turbulence optique. Une détermination précise des variations du diamètre solaire doit prendre en compte la contribution de la turbulence optique, qui peut être systématique et/ou aléatoire comme on va le voir. Pour cela on va regarder

les effets de la turbulence optique sur les images du bord solaire obtenues au sol.

2.2 Images du bord solaire et turbulence optique

La mesure du diamètre solaire est le plus souvent faite avec l'instrument de passage qu'est l'ASTROLABE [98, 51, 180, 137]. Cet instrument se base sur l'instant de passage d'un bord ou d'un autre du Soleil à une altitude donnée dans le ciel. C'est une technique héritée de l'astrométrie stellaire qui est très efficace en terme de précision géométrique. Les effets de la turbulence optique sur la position apparente des étoiles est une agitation qui statistiquement a une moyenne nulle. Il suffit alors de répéter les mesures et de moyenner le résultat pour s'approcher de la position angulaire la plus précise. Il n'en est pas de même pour le diamètre solaire. En effet, quelle que soit la méthode envisagée pour la définition d'un bord photométrique apparent du Soleil, les images du bord sont certes affectées par une agitation aléatoire comme dans le cas stellaire, mais aussi d'un effet systématique que fait apparaître la largeur moyenne des figures de *speckles* en conjonction avec l'assombrissement centre-bord solaire. C'est en plus un effet fluctuant qui se superpose aux fluctuations d'angle d'arrivée. Cet effet est illustré dans le chapitre suivant.

Afin d'éviter les effets perturbatifs de ces effets fluctuants à moyennes variables, on peut considérer les images du bord solaire (ou du Soleil) en longue-pose obtenues en présence de turbulence optique. Mais avant ça, on va décrire comment modéliser ces images longue-pose du bord solaire.

2.2.1 Assombrissement centre-bord solaire

On va s'intéresser aux images du bord solaire dans un champ angulaire de quelques secondes d'arc. A cette échelle on peut considérer que la distribution angulaire en intensité de la partie visible du Soleil a une symétrie de révolution autour du centre du disque solaire. Les images qu'on obtient dans le visible sont essentiellement dominées par le rayonnement émis par la photosphère. On négligera les contributions du fond du ciel et de la chromosphère en considérant qu'elles sont en dessous des seuils de détectabilité.

La distribution angulaire d'intensité dans la photosphère est déterminée par la distribution en profondeur de la température [47]. Cette distribution d'intensité se caractérise par un assombrissement radial du centre au bord du disque solaire. L'assombrissement centre-bord (*limb darkening*) dépend de la longueur d'onde d'observation et c'est pourquoi on observe un rougisement vers le bord dans le visible.

Afin de modéliser les images du bord solaire en présence de turbulence optique on va se baser sur un modèle d'assombrissement centre-bord qui se présente sous la forme d'une loi empirique qui a été ajustée à des données expérimentales moyennes. En effet, on ne va pas s'occuper des variations locales qui peuvent affecter la surface de la photosphère (granulation, oscillations...). En un mot

on va considérer une photosphère lisse et localement non-résolue. On se réfère à des modèles qui découlent des observations du Soleil effectuées au *National Solar Observatory* à Kitt Peak [200] avec le *McMath Solar Telescope* [133] entre le minimum d'activité solaire en 1986 et son maximum en 1990 [134]. Ces mesures complètent les mesures prises avec le même télescope mais avec une instrumentation différente en 1977. D'autres mesures indépendantes dans des longueurs d'onde particulières ont confirmé par la suite la pertinence de ces mesures [104]. Les fonctions d'assombrissement centre-bord peuvent être de plus considérées comme assez stables [114] si l'on se contente de la configuration angulaire moyenne sans tenir compte des variations locales qui affectent continuellement la photosphère.

Les mesures d'intensité pour des longueurs d'onde différentes ont été effectuées jusqu'à environ 7" du bord solaire à cause de la difficulté de mener des mesures et de l'importance des effets de la turbulence optique au bord [134]. La continuité de la photosphère permet une extrapolation analytique qui sera sans conséquence majeure sur nos modélisations.

On va définir R comme étant un rayon angulaire dans la distribution $\vec{\theta}_0$ des rayonnements incidents et dont l'origine correspond au centre du disque solaire apparent. Au niveau du bord solaire $R = R_\odot$ où R_\odot est le rayon angulaire du disque solaire tel qu'observé depuis le sol. Une valeur moyenne du rayon angulaire solaire défini pour une distance d'une unité astronomique (1 AU = 1.495979 10¹¹ m) est $R_\odot = 959.63''$ [47]. On retiendra pour nos simulations une valeur approximative de $R_\odot = 960''$.

Parmi les fonctions analytiques qui représentent les fonctions d'assombrissement centre-bord [135] la fonction polynomiale du 5^{me} ordre en $\sqrt{1 - [R/R_\odot]^2}$ est celle qui s'ajuste le mieux aux données expérimentales [134, 135, 136]. On écrira que

$$\frac{I(\lambda, R)}{I(\lambda, 0)} = \sum_{k=0}^5 A_k(\lambda) \left[1 - \left[\frac{R}{R_\odot} \right]^2 \right]^{k/2} \quad (2.1)$$

pour $R < R_\odot$ et $I(\lambda, R) = 0$ ailleurs.

$I(\lambda, R)$ est l'intensité à une longueur d'onde λ d'un point du disque solaire dont le rayon angulaire par rapport au centre du disque est R . Cette intensité est ici normalisée à l'intensité au centre du disque solaire $I(\lambda, 0)$ pour $R = 0$. Pour cela, les coefficients $A_k(\lambda)$ du polynôme qui déterminent la forme de la fonction d'assombrissement pour chaque longueur d'onde doivent satisfaire à

$$\sum_{k=0}^5 A_k(\lambda) = 1 \quad (2.2)$$

Les coefficients $A_k(\lambda)$ sont obtenus par un ajustement du modèle aux mesures expérimentales.

Ces fonctions peuvent être réécrites de manière très simplifiée [77] pour une modélisation plus aisée des effets multi-longueur d'onde qui offre une plus grande facilité pour extrapoler l'assombrissement vers le bord solaire. Ce modèle s'écrit

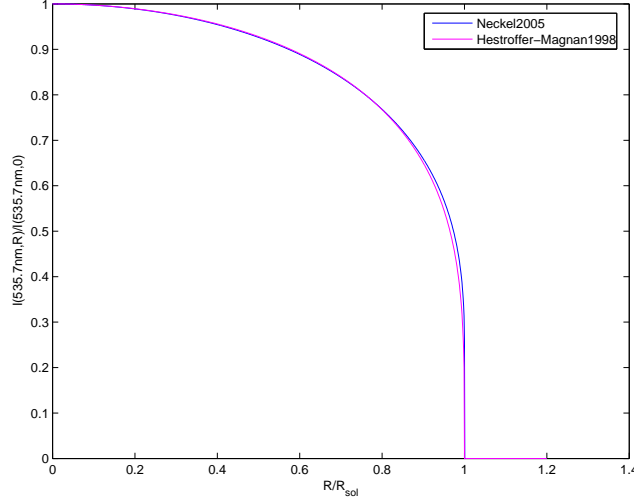


FIG. 2.2 – La fonction d’assombrissement centre-bord pour la longueur d’onde $\lambda=535.7$ nm avec l’équation 2.1 pour la courbe "Neckel2005" en se basant sur le modèle analytique donnant les coefficients $A_k(\lambda)$ en fonction de λ [136] et aussi avec l’équation 2.3 pour la courbe "Hestroffer-Magnan1998" en interpolant les valeurs de $\alpha(\lambda)$ [77]. Les deux courbes présentent un écart moyen de l’ordre de 0.35 %, ce qui nous permet de dire que les modèles sont équivalents au premier ordre. De par sa formulation simple et par la simplicité d’interpoler le coefficient $\alpha(\lambda)$ on choisira plutôt ce dernier modèle pour les simulations numériques du bord solaire.

$$\frac{I(\lambda, R)}{I(\lambda, 0)} = \left[1 - \left[\frac{R}{R_\odot} \right]^2 \right]^{\frac{\alpha(\lambda)}{2}} \quad (2.3)$$

pour $R < R_\odot$ évidemment.

$\alpha(\lambda)$ est un coefficient qui s’obtient par ajustement de ce modèle au modèle précédent.

La figure 2.2 montre une fonction d’assombrissement obtenue avec les deux modèles adaptés à la longueur d’onde $\lambda = 535.7$ nm. On remarque que les deux modèles sont numériquement presque équivalents. On utilisera donc pour les simulations numériques des images du bord solaire le modèle d’assombrissement centre-bord décrit par l’équation 2.3. On procédera par interpolation des coefficients $\alpha(\lambda)$ [77] aux longueurs d’onde qui nous concernent.

2.3 Les images longue-pose du bord solaire

Les images longue-pose en présence de turbulence optique peuvent être considérées comme isoplanétiques comme on l’a vu (Paragraphe 1.3.5). Dans ce cas

l'équation 1.37 peut s'écrire

$$I(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}_0 I_0(\vec{\theta}_0) PSF^{LP}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \quad (2.4)$$

où $PSF^{LP}(\vec{\theta})$ est la PSF longue-pose isoplanétique normalisée par l'intensité de la source et centrée dans le sens où elle correspond à une étoile située sur l'axe optique à $\theta_0 = 0$.

Cette intégrale est un produit de convolution qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$I(\vec{\theta}) = I_0(\vec{\theta}) \otimes PSF^{LP}(\vec{\theta}) \quad (2.5)$$

Le terme $I_0(\vec{\theta})$ qui est la distribution angulaire de l'éclairement arrivant sur l'instrument peut être modélisé dans le cas des images du bord solaire par la fonction d'assombrissement centre-bord du Soleil appropriée. Pour la PSF longue-pose $PSF^{LP}(\vec{\theta})$ on peut procéder dans le cas exclusif d'une pupille circulaire avec obstruction centrale et d'une turbulence optique isotrope comme dans le paragraphe 1.3.5. Pour pouvoir s'adapter à toute information nouvelle concernant la pupille d'entrée du télescope, ainsi qu'à une éventuelle anisotropie de la turbulence optique, on va utiliser dans le cadre de la modélisation numérique des images longue-pose du bord solaire une approche plus directe pour le calcul des PSF longue-pose.

2.3.1 Calcul numérique des PSF longue-pose

Supposons que l'on veuille obtenir une PSF longue-pose sous forme d'une matrice rectangulaire de taille $N_x \times N_y$ points de chaque côté avec un pas d'échantillonnage angulaire $\delta\theta$.

Si on regarde l'équation 1.45, la PSF longue-pose est donnée par la transformée de Fourier bidimensionnelle où le terme \vec{R}/λ est une fréquence angulaire. Afin de pouvoir utiliser la procédure FFT (*Fast Fourier Transform*) bidimensionnelle pour effectuer la transformée de Fourier du terme $B_\Psi(\vec{R})Tp(\vec{R})$, l'échantillonnage spatial en \vec{R} doit être défini par un pas d'échantillonnage spatial (δ_x, δ_y) donné par

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{\lambda}{N_x \delta\theta} \\ \delta_y &= \frac{\lambda}{N_y \delta\theta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

On peut ainsi utiliser la FFT bidimensionnelle pour relier ce qui se passe au niveau de la pupille selon un échantillonnage avec le pas (δ_x, δ_y) à la PSF longue-pose échantillonnée avec un pas angulaire $\delta\theta$. En terme de précision dans les calculs numériques on peut aussi utiliser de manière plus générale une intégration numérique pour la transformée de Fourier [71]. Pour les besoins en

précision numérique et comparativement avec les autres sources d'incertitude on se contentera d'utiliser néanmoins la FFT.

On crée tout d'abord une matrice $pupille(\vec{R})$ de dimension $N_x \times N_y$ avec un pas d'échantillonnage (δ_x, δ_y) qui représente l'image de la transmission de la pupille d'entrée en amplitude. Pour l'instant on ne représente que la géométrie de la pupille en attribuant une valeur 1 aux zones de transmission et 0 ailleurs. On peut à terme affiner cette fonction pupille en utilisant directement la fonction pupille vraie (avec araignée et autres effets) et en y introduisant les aberrations optiques du télescope sous forme de déphasages complexes.

Une matrice $pupille(\vec{R})$ sert à calculer la fonction $Tp(\vec{R})$ et comme celle-ci s'annule au delà d'un rayon $R = D$ où D est le diamètre de la pupille, on fera attention à ce que la largeur spatiale de la matrice $pupille(\vec{R})$ soit supérieure au double du diamètre de la pupille. On écrira

$$N_x \delta_x = \lambda / \delta \theta \geq 2D \quad (2.7)$$

Il faut aussi s'assurer que la pupille est suffisamment bien échantillonnée et que D/δ_x et D/δ_y sont assez grands.

L'application de la FFT bidimensionnelle à $pupille(\vec{R})$ donne l'ASF instrumentale. Le module au carré donne la PSF instrumentale $PSF_{instr}(\vec{\theta})$ qui dans le cas d'une pupille circulaire sans obstruction centrale serait une tache d'Airy [27]. Dans le cas général on écrira

$$PSF_{instr}(\vec{\theta}) = \left| FFT2 \left\{ pupille(\vec{R}) \right\} \right|^2 \quad (2.8)$$

La forme de la PSF instrumentale dépend de la fonction pupille. Il est possible en effet d'intervenir sur la fonction pupille pour modifier la forme de la PSF instrumentale. Un filtrage continu en amplitude (apodisation) est aujourd'hui de plus en plus envisagée en astronomie. Un filtrage complexe qui modifierait la phase de manière non-continue sur la pupille serait tout aussi bien envisageable [37]. Cette technique appelée super-résolution (*superresolution*) est actuellement utilisée en optique laser avec des éléments diffractifs hybrides dotés d'une symétrie de révolution qui optimisent l'apodisation en amplitude et l'aberration en phase de la pupille pour obtenir la PSF instrumentale désirée [115, 116]. Pour les applications en astronomie on pourra envisager de s'affranchir de cette symétrisation centrale et d'utiliser les éléments d'optique adaptative pour introduire les retards de phase adéquats.

Il suffit maintenant de regarder l'équation 1.45 pour voir qu'en l'absence de turbulence optique, la fonction $Tp(\vec{R})$ s'obtient par la transformée de Fourier inverse de la PSF instrumentale [76]. En appliquant la FFT bidimensionnelle on écrit donc

$$Tp(\vec{R}) = IFFT2 \left\{ PSF_{instr}(\vec{\theta}) \right\} \quad (2.9)$$

La fonction $Tp(\vec{R})$ est obtenue numériquement à partir de la fonction pupille avec la possibilité d'y introduire les aberrations optiques qui l'affectent.

L'introduction des effets statistiques de la turbulence optique se fait à travers la fonction de covariance spatiale $B_{\Psi}(\vec{R})$ des fluctuations de l'amplitude complexe au niveau de la pupille, qui est obtenue par intégration numérique de la densité spectrale de la phase sans diffraction tel qu'on l'a vu dans le paragraphe précédent.

On utilisera a priori le modèle de von Kàrmàn. Le modèle peut être affiné à partir de données expérimentales.

La PSF longue-pose est obtenue par transformation de Fourier en utilisant la FFT bidimensionnelle du produit $B_{\Psi}(\vec{R})Tp(\vec{R})$ tel que le montre l'équation 1.45. On écrira dans ce cas

$$PSF_{lp}(\vec{\theta}) = FFT2 \left\{ B_{\Psi}(\vec{R})Tp(\vec{R}) \right\} \quad (2.10)$$

La figure 1.5 montre un exemple de PSFs longue-pose obtenues de cette façon.

Les PSF longue-pose (et les PSF instrumentales par la même occasion) peuvent être convoluées par la distribution d'intensité du rayonnement arrivant sur l'instrument depuis le bord solaire observé afin d'obtenir des images longue-pose simulées du bord solaire voulu. Une illustration d'une image simulée du bord solaire obtenu à travers un instrument en l'absence de turbulence optique est donnée par l'image de haut dans la figure 3.2. La figure 2.3 montre des coupes transversales dans l'image longue-pose du bord solaire en l'absence et en présence de turbulence optique.

2.4 Effets de turbulence optique sur les mesures du diamètre solaire en longue-pose

Dans le cas d'images longue-pose du bord solaire, le profil du bord subit un étalement. Cet étalement est isoplanétique et systématique. Il dépend de la forme de la PSF longue-pose, qui dépend elle du modèle spectral de la turbulence optique en cours et du télescope, et de la fonction d'assombrissement centre-bord solaire. La figure 2.3 en est une illustration.

Il existe plusieurs définitions pour le bord photométrique solaire. Le Soleil n'étant pas un corps solide, cette définition ne peut être fixée que par convention [152]. L'image longue-pose d'un bord du disque solaire est schématiquement la convolution de la fonction d'assombrissement centre-bord par la PSF longue-pose de l'instrument en présence de turbulence optique. Différentes méthodes ont été proposées pour définir un bord mathématique à partir de cette résultante. Parmi les plus populaires d'entre-elles figure la méthode de la Définition du bord par Transformée de Fourier Finie (*the Finite Fourier Transform Definition - FFTD*) [79]. L'implémentation de cette méthode peut être considérée comme étant une convolution de l'image longue-pose par une fonction choisie de telle sorte que le produit de convolution s'annule à une position donnée qui est définie comme étant le position du bord [35]. C'est la méthode retenue pour les mesures du *Solar Disk Sextant* (SDS) [58].

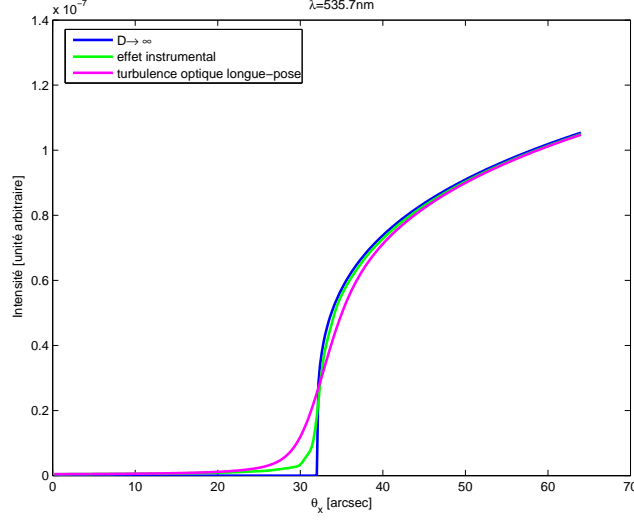


FIG. 2.3 – Coupes transversales dans l'image du bord solaire avec un échantillonnage angulaire de 0.2 arcsec sur 320 "pixels" sans que soit introduit l'effet de la pixelisation. La répartition angulaire de l'intensité reçue par l'instrument (notée dans ce graphe " $D \rightarrow \infty$ ") est modélisée par la fonction d'assombrissement donnée par l'équation 2.3. La longueur d'onde d'observation est $\lambda=535.7$ nm. L'image du bord en l'absence de turbulence optique (notée ici "effet instrumental") est obtenue par rapport à l'instrument SODISM où le diamètre de la pupille d'entrée est $D=9$ cm et le diamètre de l'obstruction centrale $D'=3.4$ cm. L'image longue-pose du bord vu à travers ce même instrument a été obtenue pour une turbulence optique qui obéit au modèle de von Kàrmàn où le paramètre de Fried rapporté à la longueur d'onde standard $\lambda=550$ nm est donné par $r_0(550nm)=2$ cm et l'échelle externe de turbulence optique donnée par $L_0=5$ m. On rappelle toutefois que l'assombrissement centre-bord, la PSF instrumentale et la PSF due à l'instrument et à la turbulence optique sont tous calculés pour une même longueur d'onde $\lambda=535.7$ nm. On peut se rendre compte que comme le profil de l'image du bord solaire en longue-pose dépend du modèle de turbulence optique, de la fonction d'assombrissement centre-bord et de la réponse impulsionnelle de l'instrument alors l'effet la turbulence optique en longue-pose sur la mesure du diamètre solaire dépendra de la manière avec laquelle on définit le bord solaire. Bien que l'effet de la turbulence optique en longue-pose sur la mesure du diamètre solaire soit systématique, il est nécessaire de bien définir le modèle de turbulence optique et le modèle d'assombrissement centre-bord pour remonter au diamètre vrai du Soleil.

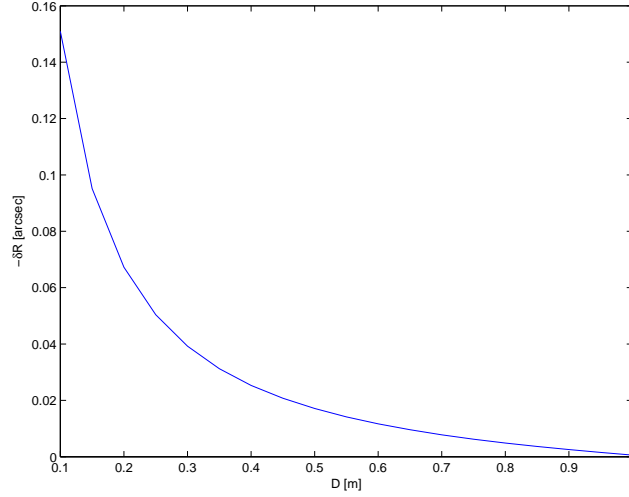


FIG. 2.4 – Le retrait du bord (variation systématique du rayon solaire) en fonction du diamètre D de la pupille d’entrée d’un télescope sans obstruction centrale dans le cas où l’on définit le bord solaire par le point d’inflexion (position de la plus forte pente). Les mesures, les images et les PSF instrumentales correspondent ici à la longueur d’onde $\lambda=535.7$ nm.

La définition du bord solaire en longue-pose par la position du point d’inflexion du profil du bord est la méthode la plus directe et la plus souvent retenue [180]. Elle ne requiert pas l’introduction d’une définition mathématique spécifique à travers un choix de paramètres ou de fonctions de filtrages. Il n’empêche qu’elle n’est pas si universelle que ça.

Si on examine par exemple la position du point d’inflexion en absence de turbulence optique, on trouve que celle-ci varie en fonction du diamètre du télescope. La figure 2.4 en est une illustration. Une première estimation de la position du bord est obtenue par l’ajustement d’une fonction gaussienne sur la dérivée première de l’image du bord obtenue avec la PSF instrumentale correspondant au diamètre voulu, puis une deuxième estimation est faite en cherchant le point de passage par zéro de l’ajustement paramétrique polynômial de la dérivée seconde de l’image. Le retrait du bord est d’autant plus important que le diamètre de la pupille est petit. Des instruments de diamètres différents ne mesurent pas le même diamètre si la correction de cet effet n’est pas introduite.

Lorsqu’on introduit la turbulence optique en longue-pose il se produit aussi un déplacement du point d’inflexion du profil de bord en fonction des conditions de *seeing*. Considérant un modèle de von Kàrmàn monocouche (un modèle de von Kàrmàn multicouche ne correspond pas à un modèle de von Kàrmàn monocouche s’il existe un profil différencié d’échelle externe [123]) alors le retrait du bord est d’autant plus important que r_0 est petit et que L_0 est grand, donc le retrait du bord pour un profil d’assombrissement centre-bord donné (dépendant

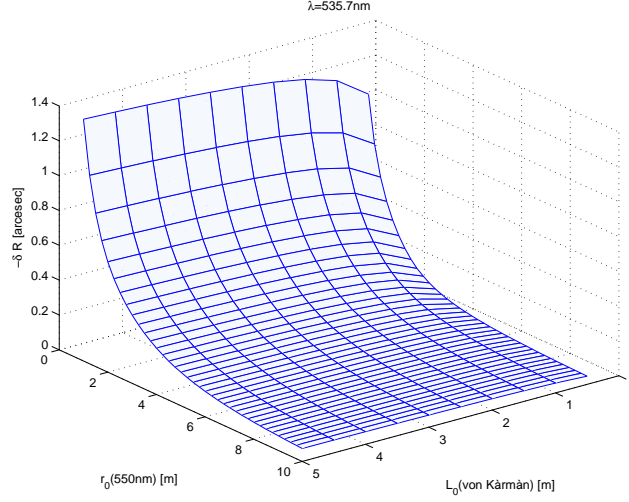


FIG. 2.5 – Le retrait du bord (variation systématique du rayon solaire) en fonction des paramètres $r_0(550nm)$ (paramètre de Fried rapporté à la longueur d'onde $\lambda=550\text{ nm}$) et L_0 dans le cas d'un modèle de turbulence optique de von Kármán monocouche et dans le cas où l'on définit le bord par le point d'inflexion (position de la plus forte pente). Les paramètres instrumentaux se rapportent à l'instrument SODISM où le diamètre de la pupille d'entrée est $D=9\text{ cm}$ et le diamètre de l'obstruction centrale $D'=3.4\text{ cm}$. Les mesures, les images et les PSF longue-pose correspondent ici à la longueur d'onde $\lambda=535.7\text{ nm}$. Les images utilisées ne sont pas affectées par le filtrage de pixelisation. Une première estimation de la position du bord est obtenue par l'ajustement d'une fonction gaussienne sur la dérivée première de l'image du bord obtenue avec la PSF longue-pose correspondant aux paramètres de turbulence optique voulus, puis une deuxième estimation est faite en cherchant le point de passage par zéro de l'ajustement paramétrique polynomial de la dérivée seconde de l'image longue-pose. r_0 ici est en cm et non pas en m .

de la longueur d'onde) est d'autant plus important que le *seeing* est mauvais si le bord solaire est défini par le point d'inflexion du limbe. L'effet de l'échelle externe est faible si la pupille est petite. Une bonne modélisation de ce retrait systématique repose sur une bonne modélisation de la fonction d'assombrissement centre-bord et de la modélisation de la turbulence optique.

Quoi qu'il en soit, l'effet de la turbulence optique sur le diamètre solaire défini par la position du point d'inflexion est un effet systématique qui peut être modélisé. Cet effet systématique peut être corrigé si les conditions statistiques et spectrales de la turbulence optique régnant durant les mesures sont connues avec exactitude.

2.5 Conclusion

Le sujet de ce chapitre a pour thème principal l'observation astrométrique du Soleil en présence de la turbulence optique. La problématique qui s'était posée était que les mesures astrométriques du diamètre solaire s'effectuant avec des instruments différents donnaient des mesures différentes ayant des variations très différentes (parfois même en opposition de phase). Il est donc utile de montrer que puisque les astrolabes sont des instruments de passage, l'effet instantané de la turbulence n'était pas du tout une agitation autour d'une position moyenne fixe comme pour les étoiles mais qu'il existait un biais systématique qui dépendait des conditions de *seeing* durant l'observation. Cet effet systématique peut être maîtrisé dans le cadre d'une imagerie longue-pose du Soleil et la relation entre le retrait du bord aux conditions du *seeing* solaire peut servir à calibrer les mesures du diamètre solaire si on connaît précisément les conditions statistiques de la turbulence optique durant les mesures.

Chapitre 3

La mesure des fluctuations d'angle d'arrivée à partir de l'agitation sur les images courte-pose du bord solaire

3.1 Le Soleil en Haute Résolution Angulaire

Le Soleil est une étoile pleine de vie, ne serait-ce que par les phénomènes irruptifs dont certaines manifestation peuvent être observées de la Terre à l'oeil nu. Les structures fines dans la photosphère ont cependant une taille angulaire de l'ordre du dixième de la seconde d'arc, une résolution qui est loin d'être atteinte par les télescopes solaires au sol dans les conditions habituelles de turbulence optique sans l'apport des techniques de la Haute Résolution Angulaire. Tout comme dans l'astronomie stellaire, la HRA en astronomie solaire repose sur deux approches complémentaires. Une compensation en temps réel des fronts d'onde avec une optique adaptative adaptée à l'observation du Soleil, et des techniques de restauration a posteriori des images, dérivées de la *speckle interferometry* [194, 195, 142, 129].

Un système d'optique adaptative pour l'observation du Soleil se compose toujours d'un analyseur de front d'onde (*Wave-Front Sensor*) qui mesure les déformations du front d'onde arrivant sur la pupille d'entrée du télescope, d'un système de reconstruction qui calcule les déformations de phase à partir des signaux du senseur de front d'onde, et d'un miroir déformable inclus dans l'optique du télescope, conjugué à la pupille d'entrée et dont la forme tend à redresser les fronts d'onde déformés par la turbulence optique et ainsi améliorer la qualité des images. Le système d'optique adaptative peut tout aussi bien être conçu avec juste une correction du front d'onde de type *tip-tilt* [144] ou inclure une correction des plus hauts modes d'aberration [1, 121, 53]. L'observation du Soleil

en haute résolution angulaire fait le plus souvent intervenir plusieurs techniques complémentaires [52].

Le senseur de front d'onde pour l'optique adaptative solaire est basé sur le schéma optique du senseur de front d'onde Shack-Hartmann. La différence entre l'observation solaire et l'observation stellaire est dans le mode de fonctionnement. Dans le cas de l'observation de nuit, on utilise l'analyseur de Shack-Hartmann pour imager une étoile de référence à travers chacune de ses sous-pupilles. Les variations de la pente du front d'onde au niveau de chaque sous-pupille sont données par les fluctuations d'angle d'arrivée (Paragraphe 3.6), soit par les variations de la position de l'étoile de référence dans les champs de vision associés aux sous-pupilles. A partir de là, un système de reconstruction de front d'onde calcule les fluctuations de phase à partir du champ de fluctuations d'angle d'arrivée et envoie l'information au système de contrôle du miroir déformable afin d'y appliquer la compensation requise.

Dans le cas de l'observation du Soleil, il n'y a pas l'équivalent d'un point-source séparable. Pour mesurer les déformations du front on procède différemment. Les sous-pupilles du senseur Shack-Hartmann produisent dans leurs foyers respectifs des images d'une même zone de la photosphère avec une structure apparaissant avec un contraste suffisant. Il est à noter qu'il est important que cette zone d'intérêt de la photosphère imagée par le senseur de front d'onde soit isoplanétique pour avoir une représentation correcte de l'état de dégradation des fronts d'onde [167].

A cause de la turbulence optique, les fronts d'onde issus de cette zone de la photosphère ont des pentes différentes au niveau de chaque sous-pupille. Il s'en suit que les images correspondantes sont affectées par des déplacements différents. Les fluctuations d'angle d'arrivée relatives se déduisent de la corrélation mutuelle spatiale des images issues des sous-pupilles [191, 193, 155]. Les pentes du front d'onde sont ainsi déterminées et soumises au reste de la chaîne de traitement aboutissant au miroir déformable. Le suivi de l'agitation des images ne peut fonctionner correctement près du bord solaire à cause des propriétés de la corrélation mutuelle et sa sensibilité aux signaux présentant des tendances globales d'accroissement monotone [191]. Il est aussi préférable d'opérer sur des structures ne présentant pas de périodicités spatiales comme la granulation afin d'éviter les redondances dans la fonction de corrélation mutuelle des images [121].

Pour que fonctionnent ces techniques de manière optimale, il est important de connaître les propriétés spatiales et angulaires de la turbulence optique. Pour donner un exemple concret, la connaissance de l'angle d'isoplanétisme peut permettre une meilleure optimisation du champ de vision de l'analyseur de front d'onde (le Shack-Hartmann corrélateur) et de mieux cerner les améliorations en résolution angulaire des images acquises dans le voisinage angulaire immédiat. Une caractérisation des propriétés statistiques de la turbulence optique permet aussi de qualifier et rechercher des sites pour les observatoires solaires [44, 45, 33, 34, 165].

La caractérisation de la turbulence optique se fait actuellement pour l'essentiel avec deux instruments. Le premier est une version modifiée du DIMM

(Differential Image Motion Monitor) initialement développée pour la caractérisation du seeing diurne [154] et qui a été adaptée à l'observation du Soleil. Il s'agit pour le DIMM solaire (Solar DIMM ou S-DIMM) de former sur une caméra CCD deux images d'un même bord solaire qui se forment à travers deux sous-pupilles à l'entrée d'un télescope. Les images subissent des agitations différentes. Elles subissent une agitation différente et la variance de l'agitation relative de deux points opposés des images du bord solaire permet de remonter à la valeur de $r_0(\lambda)$ via la modélisation de la fonction de structure spatiale des fluctuations d'angle d'arrivée [154]. C'est aujourd'hui l'instrument standard qui caractérise par le paramètre de Fried la turbulence optique de jour à partir de l'agitation affectant les images du bord solaire [32, 23].

L'autre instrument se base sur la scintillation intégrée du disque solaire. Il s'agit du SHABAR (SHAdow BAnd Ranging) qui se présente comme une distribution spatiale non-redondante de photo-capteurs exposés au Soleil. Les covariances spatiales entre les signaux des photo-capteurs dépendent des diverses contributions liées à la distribution verticale de la turbulence [82]. Ce concept est aussi applicable à la scintillation intégrée de la Lune avec en plus les considérations liées aux phases lunaires [78].

On va s'intéresser dans ce qui suit aux fluctuations d'angle d'arrivée et on discutera essentiellement de la manière selon laquelle on peut les mesurer de la manière la plus efficace possible à partir des images courte-pose du bord solaire. Cette question n'est pas encore fixée est il est nécessaire de savoir ce qu'on mesure et comment avant d'envisager toute modélisation de la turbulence optique à partir des images du bord solaire. En bref, le "qu'est-ce qu'on mesure et comment" est le principal sujet de discussion de ce chapitre.

3.2 Les images courte-pose du soleil en présence de turbulence optique

Revenons tout d'abord sur les images courte-pose (instantanées) du bord solaire. On a déjà vu dans le paragraphe 1.3.4 qu'une image $I(\vec{\theta})$ d'un objet présentant une distribution angulaire d'intensité dans le ciel $I_0(\vec{\theta}_0)$ était donnée par l'équation 1.37 et s'écrivait

$$I(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}_0 I_0(\vec{\theta}_0) PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta}) \quad (3.1)$$

où $PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta})$ est l'image d'un point source dans la direction angulaire $\vec{\theta}_0$ normalisée en intensité.

On peut considérer une autre façon d'écrire les PSF. On peut en effet considérer les PSF comme décrites chacune dans un référentiel angulaire lié à l'angle de visée θ_0 comme si elles se trouvaient toutes dans l'axe optique de l'instrument. On peut donc écrire la PSF normalisée et centrée $PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta})$ en fonction de la PSF normalisée $PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta})$ selon la relation

$$PSF_{\vec{\theta}_0}^N(\vec{\theta}) = PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \quad (3.2)$$

et dans ce cas

$$PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) = \left| ASF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \right|^2 \quad (3.3)$$

avec $ASF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta})$ qui est l'ASF normalisée en amplitude et centrée autour de la direction angulaire $\vec{\theta}_0$. Cette dernière est donnée par

$$ASF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \propto \int d\vec{r} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r}) G(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \cdot \vec{r} \right\} \quad (3.4)$$

Dans ce cas on écrira l'image obtenue en présence de turbulence optique sous la forme

$$I(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}_0 I_0(\vec{\theta}_0) PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \quad (3.5)$$

Le comportement de chaque PSF définit localement les propriétés de l'image courte-pose du bord solaire. Connaissant les propriétés statistiques et spectrales de la turbulence optique, on peut générer des images instantanées du bord solaire par simulation numérique pour en observer les propriétés.

3.3 Simulation numérique des PSF instantanées en présence de turbulence optique

La simulation numérique d'écrans de phase aléatoires ou de toute autre observable est un outil quasi-incontournable dans les études liées à la turbulence optique. C'est surtout le cas en Optique Adaptative où la réponse du système est comparée à la déformation de front d'onde introduite. Il en sera de même dans notre cas. Nous avons besoin de savoir générer des images instantanées du bord solaire pour pouvoir voir à quel point on peut en extraire de l'information. Pour l'instant il s'agit seulement de décrire de manière schématique la procédure de génération d'une distribution spatiale de fluctuations de phase (écran de phase) selon une méthode spectrale utilisant la procédure FFT (Fast Fourier Transform). Pour son application aux fronts d'onde cette méthode sera souvent appelée Méthode de Nakajima dans la suite [131].

Tel que montré dans la figure 1.2, il est possible à partir d'une densité spectrale déterministe (moyenne) d'obtenir un signal (distribution) aléatoire qui obéit statistiquement au modèle injecté. On fera exactement la même chose pour les écrans de phase.

Si on veut une distribution spatiale de fluctuations de phase $\varphi(\vec{r})$ à une longueur d'onde donnée λ selon une matrice carrée de taille $N \times N$ et selon un pas

d'échantillonnage spatial dx donné, on va échantillonner l'espace des fréquences spatiales \vec{f} selon une matrice carrée de taille $N \times N$. La fréquence spatiale maximale est donnée par $f_{max} = 0.5/dx$ et le pas d'échantillonnage dans chaque direction est donné par $df = 2f_{max}/N$. L'échantillonnage des fréquences spatiales se fait dans les deux directions selon une séquence $0, df \rightarrow f_{max}, -f_{max} + df \rightarrow -df$ [141].

Schématiquement, la méthode de Nakajima consiste à effectuer la transformation de Fourier suivante :

$$\varphi(\vec{r}, 0) = FFT^{-1} \left\{ A(\vec{f}) \sqrt{W_\varphi(\vec{f})} \exp\{iB(\vec{f})\} \right\} \quad (3.6)$$

FFT est la transformée de Fourier numérique réalisée par la procédure de la Fast Fourier Transform. $W_\varphi(\vec{f})$ est la densité spectrale spatiale des fluctuations de phase. $A(\vec{f})$ est une distribution de nombres aléatoires de distribution statistique gaussienne et de variance égale à 1 et $B(\vec{f})$ une distribution de nombres aléatoires de distribution statistique uniforme et compris entre -2π et 2π .

Afin d'obtenir une distribution de fluctuations de phase réelle il est introduit sur le spectre les contraintes de symétrie adéquates. En effet, pour que $\varphi(\vec{r}, 0)$ soit réelle il faut que la partie réelle du spectre soit symétrique et que la partie imaginaire soit anti-symétrique. Pour cela on génère souvent le spectre précédent et on sépare les parties réelle et imaginaire dans un deuxième temps. On peut préférer générer directement les parties réelle et imaginaire en les "randomisant" séparément de manière à ce que cette méthode s'écrive plutôt

$$\varphi(\vec{r}, 0) = FFT^{-1} \left\{ \sqrt{W_\varphi(\vec{f})} [A_1(\vec{f}) \cos\{B(\vec{f})\} + iA_2(\vec{f}) \sin\{B(\vec{f})\}] \right\} \quad (3.7)$$

Ceci est l'approche la plus utilisée pour l'Optique Adaptative par exemple. La même chose peut être faite avec tout autre observable de la turbulence optique en mettant la densité spectrale correspondante. Cette méthode souffre néanmoins de deux petites imperfections. Tout d'abord, le plus souvent, l'échantillonnage spatial ne permet pas un échantillonnage suffisamment fin dans les basses fréquences [99]. En effet, cette méthode est d'autant moins efficace que le pas d'échantillonnage df augmente. La partie basse fréquence de la densité spectrale qui contient la majeure partie de l'énergie de la turbulence optique varie vite et est très souvent insuffisamment échantillonnée. Les propriétés statistiques des écrans de phase ne sont donc pas fidèles dans la majorité des cas aux paramètres de turbulence optique injectés via la densité spectrale.

Une solution au problème des basses fréquences de la méthode de Nakajima est d'utiliser plusieurs échantillonnages de la densité spectrale et de combiner les écrans de phase issus de ces différents échantillonnages après réajustement du pas d'échantillonnage spatial par interpolation. Dans cette approche, l'espace de Fourier est schématiquement segmenté en plusieurs sous-domaines concentriques. Les sous-domaines basse fréquence donnent des écrans de phase avec de plus grandes dimensions. La procédure se résume à une série de masquages,

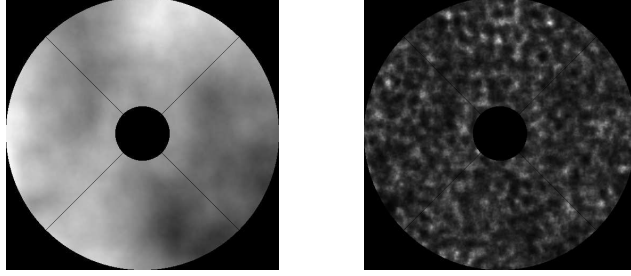


FIG. 3.1 – Résultats d'une simulation au moyen de la méthode de Nakajima d'une distribution de fluctuations de phase (à gauche) et d'intensité (à droite) dans le plan pupille d'un télescope. La couche turbulente unique est à une hauteur $h=500\text{m}$. $r_0=5\text{cm}$ pour une longueur d'onde $\lambda=550\text{nm}$. On a considéré le modèle de von Kàrmàn avec $L_0=10\text{m}$. Le diamètre de la pupille est $D=50\text{cm}$ et celui de l'obstruction centrale $D'=10\text{cm}$.

interpolations, renormalisations et additions [14] qui permettent une meilleure représentativité des basses fréquences dans les écrans de phase générés.

Bien qu'elle donne de bien meilleurs résultats, cette approche souffre néanmoins de deux inconvénients majeurs. Le premier est dû au fait qu'une série d'interpolations induit des déformations sur les grandes structures de l'écran de phase qui ne sont pas prévues dans la densité spectrale. Cet effet est néanmoins minimisé par une renormalisation adéquate après chaque interpolation [14]. L'autre inconvénient est que l'information statistique que l'on a sur les écrans de phase correspond à une densité spectrale discrètement échantillonnée et non pas à la densité spectrale théorique dans un continuum de fréquences spatiales. Cette difficulté a donné lieu à une méthode de simulation basée sur un échantillonnage aléatoire des fréquences spatiales, la méthode RWV (Random Wave Vectors) qui permet statistiquement de couvrir (sur un grand nombre de réalisations) l'espace des fréquences spatiales [96, 188]. Une autre approche dans le même esprit est celle qui consiste à utiliser un échantillonnage semi-aléatoire des fréquences spatiales afin d'optimiser la couverture statistique de l'espace des fréquences spatiales tout en assurant une contribution uniforme sur les différentes échelles de fréquence tel que le suppose le modèle de la cascade d'énergie [14, 13].

Il existe encore d'autres méthodes de simulation [151, 6] mais pour nos applications en imagerie on va se contenter de la méthode de Nakajima avec sur-échantillonnages des basses fréquences. La figure 3.1 est un exemple de distributions spatiales de fluctuations de phase et de fluctuations d'intensité obtenues avec cette méthode.

3.4 Effets de la turbulence optique sur les images du bord solaire

Une image anisoplanétique peut être regardée comme étant une distribution angulaire pondérée (par la distribution angulaire d'intensité émise par chaque point-source) de réponses impulsionnelles issues des différentes directions dans le champ de vision. Comme les rayonnements issus du bord solaire traversent des zones différentes de l'atmosphère terrestre turbulente, il en résulte que les réponses impulsionnelles dans le champ d'observation sont différentes d'un point-source à un autre.

Chaque réponse impulsionnelle (PSF) on l'a vu est schématiquement une figure de *speckles*, pour peu que les dimensions de la pupille d'entrée soient supérieures à la valeur du paramètre de Fried. Lorsque la turbulence optique est faible, ce qui revient à des valeurs de r_0 de l'ordre de la taille de la pupille ou supérieures à celle-ci, la réponse impulsionnelle se présente sous la forme d'une tache unique qui a grossièrement la taille de la PSF instrumentale en l'absence de turbulence optique mais qui néanmoins subit des déformations, des variations d'intensité, et une agitation. La déformation est due au fait que même à l'échelle de r_0 le front d'onde n'est pas plan et les déformation de celui-ci induisent des aberrations au niveau de la PSF. Les variations d'intensité sont dues à la scintillation. L'agitation est due à la pente locale du front d'onde au niveau de la pupille. Le mouvement de la PSF dans le plan focal est mesurée par la déviation de son photocentre par rapport à sa position moyenne. Lorsque la turbulence optique est forte, ou que r_0 est inférieur à la taille de la pupille, la réponse impulsionnelle est une figure éclatée de *speckles* où chaque tache a en moyenne la taille de la PSF instrumentale. La disposition des *speckles* est aléatoire et dépend de la distribution spatiale de fluctuations de phase et d'intensité au niveau de la pupille d'entrée. On peut qualitativement caractériser les figures de *speckles* par rapport au nombre moyen de taches qui dépend grossièrement du rapport entre r_0 et la taille de la pupille ou de la largeur moyenne de la figure de *speckles*, mesure d'un étalement de la PSF courte pose qui est légèrement inférieur à la largeur de la tache en longue-pose qui est une accumulation dans le temps de ces images de *speckles*. En effet, la PSF courte pose est déviée de la position moyenne d'une quantité qui est égale à la moyenne sur la pupille des pentes locales du front d'onde pondérées par les valeurs locales de l'intensité [174]. Il s'ensuit qu'au cours du temps durant lequel s'effectue l'accumulation des figures de *speckles* instantanées, celles-ci changent non seulement de forme, mais aussi de position, de sorte qu'avec l'agitation elles couvrent une zone angulaire plus étendue que celle qu'elles occupent individuellement.

Dans une image étendue, chaque réponse impulsionnelle correspond à une traversée différente de la turbulence atmosphérique. Il s'ensuit que les réponses impulsionnelles sont différentes dans leurs formes, dans leurs éclats et dans la déviation qu'elles ont par rapport à leurs positions angulaires initiales.

Lorsqu'on considère le modèle de propagation que l'on a utilisé jusqu'à maintenant, on obtient par simulation numérique des images du Soleil telles que le

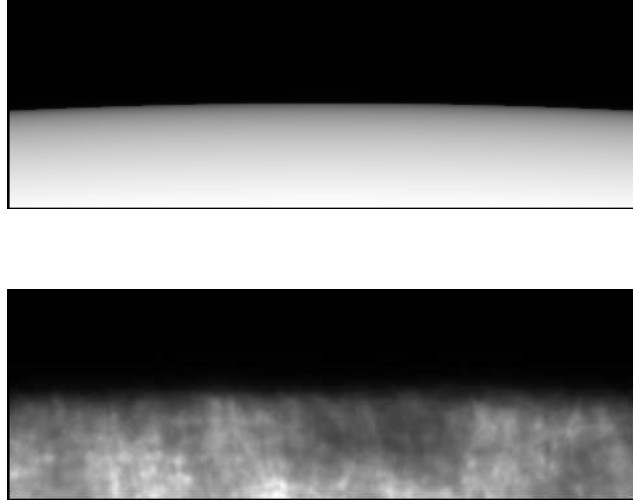


FIG. 3.2 – L'image en haut représente l'image du Soleil qu'on aurait en l'absence de turbulence optique. C'est l'image du bord solaire obtenue à travers un télescope avec une pupille d'entrée de diamètre $D=50$ cm et une obstruction centrale de diamètre $D'=10$ cm. Le pas d'échantillonnage de l'image est de 0.2 arcsec pour un diamètre apparent du soleil $R_{\odot}=960$ arcsec (l'image comporte 480×160 pixels) mais le filtrage dû à la pixelisation n'a pas été introduit. Le modèle d'assombrissement centre-bord est celui décrit par l'équation 2.3 pour la longueur d'onde $\lambda=535.7$ nm. L'image du Soleil dans ce cas n'est affectée que par la diffraction à travers l'instrument. L'image en bas représente l'image du même bord solaire telle qu'obtenue par simulation numérique à travers une importante turbulence optique, où l'on a considéré un modèle de propagation paraxiale comme décrit précédemment. Cette image a été obtenue par simulation numérique dans le cas d'un profil de turbulence avec trois couches minces localisées à des altitudes h égales à 10, 2859 et 5708 m. Le profil de la constante de structure $\left[\frac{C_n^2(h)\delta h}{\zeta} \right]$ correspondant est respectivement 9.44×10^{-12} , 1.88×10^{-12} et $3.15 \times 10^{-13} \text{ m}^{1/3}$. Ceci correspond à cette longueur d'onde à un paramètre de Fried de 2 cm. Le modèle de turbulence optique au niveau de chaque couche turbulente est le modèle de von Kármán et la valeur de l'échelle externe est égale à 10 m. La propagation paraxiale est supposée s'effectuer selon l'approximation des faibles perturbations.

montre la figure 3.2. On suppose que l'instrument ne résout pas les détails sur la surface solaire.

On peut tout d'abord remarquer dans l'image du continuum photosphérique des variations angulaires d'intensité. Ceci est due à deux effets. Tout d'abord, les réponses impulsionnelles dans des zones angulaires différentes de l'image sont issues de portions différentes de la turbulence optique. Elles subissent des fluctuations d'intensité différentes. Cet effet est donc dû à l'anisoplanétisme de la scintillation [183, 145]. L'autre effet induisant des variations d'intensité dans l'image du continuum photosphérique n'apparaît que pour les images anisoplanétiques d'objets étendus et est dû à ce qui ressemblerait à des groupements et dépeuplements localisés de réponses impulsionnelles. Il existe en effets des zones angulaires où les agitations affectant des réponses impulsionnelles proches tendent à les regrouper et d'autres zones angulaires où les agitations affectant les réponses impulsionnelles tendent à les séparer. Ceci est schématiquement dû au caractère convexe ou concave du front d'onde à grande échelle lorsqu'il est moyenné par la pupille. L'agitation est due à la pente locale du front d'onde moyenne par la pupille. Si d'une direction angulaire à une autre le front d'onde est concave, alors les agitations concentrent les réponses impulsionnelles sur une zone angulaire donnée de l'image anisoplanétique, ce qui induit une augmentation locale de l'intensité dans cette zone angulaire de l'image. Ceci revient évidemment à dépeupler d'autres zones angulaires de l'image. Cet effet ne peut se produire que si l'agitation est différente d'une direction angulaire à une autre dans le champ angulaire de l'image. C'est donc un effet de l'anisoplanétisme de l'agitation des réponses impulsionnelles.

Il se trouve cependant que cet effet n'est pas observé dans les images réelles du Soleil [196]. La raison est que cet effet d'anisoplanétisme de l'agitation est compensé dans le cas réel par une propagation du front d'onde qui n'obéit pas à l'approximation paraxiale que l'on a supposé pour ces simulations. Si l'approximation paraxiale est valide pour les images des étoiles et pour les images isoplanétiques du Soleil, elle ne l'est pas dans le cas des images anisoplanétiques. Une propagation plus réaliste doit être prise en compte.

Au bord solaire, au plus fort de l'assombrissement centre-bord, on peut remarquer d'autres effets. Le bord qui en l'absence de turbulence optique est net et suit la courbure du disque solaire est diffus et suit un contour aléatoire. On peut distinguer en effet deux effets au niveau de ce bord solaire. Si on considère les réponses impulsionnelles au niveau du bord, celles-ci sont des figures de *speckles* qui sont aussi affectées par une agitation aléatoire. La position du bord ou du moins son contour est affecté par l'agitation des réponses impulsionnelles car celles-ci impriment un mouvement de recul ou d'avance dans le sens perpendiculaire au bord, ainsi qu'un effet de regroupement ou de dépeuplement des réponses impulsionnelles dans le sens parallèle au bord comme on l'a vu pour le continuum photosphérique. Cette agitation du bord est schématiquement issue de l'agitation des réponses impulsionnelles, c'est celle qu'on modélise à partir des fluctuations d'angle d'arrivée tel qu'on va le voir dans la suite. L'autre effet est dû non pas à l'agitation des réponses impulsionnelles mais à la forme instantanée des figures de *speckles*. En effet, la fonction d'assombrissement est affectée

par la forme des réponses impulsionnelles instantanées et la forme qu'elle prend d'une zone angulaire à une autre dépend de la turbulence optique induisant les réponses impulsionnelles dans ces zones. Pour une énergie de turbulence optique donnée on peut séparer deux effets des réponses impulsionnelles en *speckles* sur le bord. Une distribution angulaire donnée de réponses impulsionnelles donne une forme donnée à la fonction d'assombrissement du bord solaire. Cet effet est essentiellement caractérisé par un étalement du bord. A fur et à mesure que les réponses impulsionnelles fluctuent, la forme du bord fluctue aléatoirement autour d'une forme moyenne donnée par un étalement moyen induit par les réponses impulsionnelles instantanées. On peut donc distinguer deux effets de la forme des réponses impulsionnelles, l'un systématique induisant un effet d'étalement moyen du bord solaire et un autre aléatoire qui fait fluctuer la forme du bord autour de la forme moyenne induite par l'étalement systématique.

Il en résulte que phénoménologiquement, les images instantanées du bord solaire sont affectées par plusieurs effets. Tout d'abord des variations d'intensité dues aux anisoplanétismes de l'intensité et de l'agitation des réponses impulsionnelles. Mais en ce qui concerne plus directement la forme du bord solaire, on peut identifier d'abord une composante systématique qui est essentiellement due à ce qu'on pourrait appeler un étalement moyen des réponses impulsionnelles instantanées, et une composante aléatoire qui est due d'une part aux variations de la forme des réponses impulsionnelles et d'autre part aux variations des agitations des réponses impulsionnelles dans le champ angulaire de l'image.

Ce qui peut ressortir en pratique de cette description qualitative des effets anisoplanétiques sur les images du bord solaire c'est par exemple que les mesures de diamètre solaire à partir d'images courte-pose affectées par la turbulence optique doivent tenir compte des effets aléatoires et systématiques qu'on a décrits. En effet, la moyenne des mesures sur des images courte-pose peut éliminer la contribution aléatoire qui est due aux agitations et aux variations de la forme des réponses impulsionnelles, mais elle n'élimine nullement la composante systématique due à l'étalement moyen des réponses impulsionnelles instantanées. Cette composante systématique qui introduit un biais sur les mesures de diamètre solaire concerne essentiellement les techniques de passage qui se basent sur des images courte-pose comme les astrolabes par exemple.

3.5 L'agitation du limbe dans les images courte-pose du bord solaire

Les images du bord solaire observé en présence de turbulence optique montrent comme on l'a vu des perturbations différentes. Tout d'abord, l'élargissement moyen des PSF produit comme en longue-pose un étalement du bord avec cette fois des variations dans la forme du profil d'intensité à cause des variations des figures de *speckles* constituant ces PSF. Un autre effet est une agitation qui affecte le bord à cause de celle qui agit les PSF. En effet, les positions des PSF fluctuent à cause des variations de pente globale des fronts d'onde par rapport

à la pupille du télescope. C'est cette quantité qu'on va essayer de mesurer sur les images du bord solaire car on sait très bien la modéliser [7, 181]. L'agitation des PSF est due aux fluctuations d'angle d'arrivée moyennées par la pupille d'entrée [174]. Les fluctuations d'angle d'arrivée (Paragraphe 3.6) sont ce qui va nous permettre de caractériser la turbulence optique affectant les images du Soleil. Lorsque l'image du bord solaire est anisoplanétique, les fluctuations d'angle d'arrivée affectant des zones angulaires différentes de l'image sont différentes car induites par des rayonnements ayant traversé des zones différentes de l'atmosphère terrestre turbulente. Il est donc possible d'avoir accès à des propriétés statistiques angulaires de la turbulence optique. Cet anisoplanétisme des fluctuations d'angle d'arrivée induit aussi des variations d'intensité dans les images du Soleil en plus de l'anisoplanétisme de la scintillation. On ne traitera pas de cet effet et on se contentera de l'agitation qui affecte le bord solaire sur les images.

3.6 Les fluctuations d'angle d'arrivée

Les mouvements du photocentre d'une PSF autour de sa position angulaire moyenne est donnée par les fluctuations d'angle d'arrivée. Les fluctuations d'angle d'arrivée sont données par la moyenne sur toute l'étendue de la pupille du télescope des pentes locales du front d'onde pondérées par les variations d'intensité dues à la scintillation [174, 189]. Si on néglige les effets de la scintillation sur la pupille, les fluctuations d'angle d'arrivée $\alpha(\lambda, \vec{r})$ selon une orientation donnée x (composante du mouvement bidimensionnel de la position du photocentre de la PSF selon une direction donnée) pour un télescope centré en une position \vec{r} sont liées aux fluctuations de phase $\varphi_0(\lambda, \vec{r})$ sur la pupille par la relation

$$\alpha(\lambda, \vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi S} \left[G(\vec{r}) \otimes \frac{\partial \varphi_0(\lambda, \vec{r})}{\partial x} \right] \quad (3.8)$$

où $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$. $G(\vec{r})$ est la fonction pupille et S l'aire de surface de la pupille.

Il s'agit du G-tilt (moyenne des inclinaisons locales du front d'onde), qui ne se confond avec le Z-tilt (inclinaison d'un plan ajusté au front d'onde) que pour les petites pupilles (lorsque $D < r_0$).

On considère ici le cas monochromatique à une longueur d'onde donnée λ . Le cas polychromatique [17] sera traité dans le chapitre suivant. On se contente aussi de l'approximation selon laquelle on ignore les effets de la scintillation même si elle ne peut être rigoureusement séparée des fluctuations d'angle d'arrivée tel que le montrent les études du front d'onde en optique adaptative [189, 74, 183, 145, 109].

La densité spectrale spatiale des fluctuations d'angle d'arrivée $W_\alpha(\lambda, \vec{f})$ est dans ce cas liée à celle des fluctuations de phase $W_{\varphi,0}(\lambda, f)$ (en supposant une statistique bidimensionnelle isotrope) au sol par

$$W_\alpha(\lambda, \vec{f}) = \lambda^2 f_x^2 W_{ap}(\vec{f}) W_{\varphi,0}(\lambda, f) \quad (3.9)$$

où $W_{ap}(\vec{f})$ est le filtrage dû à l'intégration des fluctuations locales sur toute la pupille. Dans le cas d'une pupille circulaire de diamètre D avec une obstruction centrale D' par exemple, ce filtrage en densité spectrale sera donné par

$$W_{ap}(\vec{f}) = \left[\frac{DJ_1\{\pi Df\} - D'J_1\{\pi D'f\}}{\frac{\pi}{2}[D^2 - D'^2]f} \right]^2 \quad (3.10)$$

Si on suppose que l'on extrait avec suffisamment d'efficacité les fluctuations d'angle d'arrivée à partir de l'agitation qui affecte les images du bord solaire, on peut envisager de caractériser les propriétés statistiques et spectrales de la turbulence de jour.

Dans ce cas on aura une distribution angulaire unidimensionnelle (dans le sens du bord solaire, dans une direction y) des fluctuations d'angle d'arrivée transversales (perpendiculaires au bord solaire dans une direction x) si on considère une portion du bord solaire le long de laquelle la courbure est négligeable. On peut par exemple utiliser la fonction de structure des fluctuations d'angle d'arrivée $D_\alpha(\lambda, \theta_y)$ qui s'écrit en fonction de la densité spectrale comme [7]

$$D_\alpha(\lambda, \theta_y) = 2\pi\lambda^2 \int_0^\infty df f W_{ap}(\vec{f}) \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\zeta} W_{\varphi,h}(\lambda, f) \cos \left\{ \pi\lambda \frac{h}{\zeta} f^2 \right\} \left[1 - J_0\{2\pi f \frac{h}{\zeta} \theta_y\} - J_2\{2\pi f \frac{h}{\zeta} \theta_y\} \right] \quad (3.11)$$

On rappelle que ζ exprime la masse d'air lorsque la cible se trouve à un angle zénithal non-nul.

C'est une fonction statistique angulaire qui néanmoins se base sur des caractéristiques spectrales spatiales, garantissant ainsi la possibilité de raccorder les éventuels résultats aux propriétés de la dégradation introduite par la turbulence optique sur les systèmes d'imagerie. La fonction de structure angulaire des fluctuations d'angle d'arrivée offre surtout l'avantage de donner un accès direct aux propriétés anisoplanétique de la turbulence optique. La fonction de structure rend mieux compte des fluctuations d'angle d'arrivée issues des contributions des hautes couches plutôt que celles des basses couches. L'exploitation d'une telle quantité dépend aussi pour beaucoup des hypothèses que l'on introduit sur les propriétés statistiques de la turbulence optique en altitude. On peut par exemple supposer que toute la turbulence atmosphérique peut être rapportée à une couche turbulente équivalente qui, obéissant à un modèle de turbulence optique déterminé, permet une caractérisation des conditions de turbulence optique à l'aide d'un nombre très limité de paramètres [161]. L'approche de la couche turbulente équivalente est très limitée et ne rend pas compte des réponses différentes que peuvent avoir différentes techniques d'observation par rapport aux propriétés de l'anisoplanétisme de la turbulence optique. Il est d'ailleurs

très difficile d'assigner une quelconque forme analytique au modèle de turbulence optique monocouche même si on connaît le modèle régissant la turbulence optique issue de toutes les couches turbulence du profil atmosphérique [123]. En supposant connu le modèle régissant chaque couche on peut remonter au profil paramétrique de la turbulence optique à partir de la fonction de structure des fluctuations d'angle d'arrivée. On peut se définir par exemple un profil de $C_n^2(h)$ à partir d'un profil constant de l'échelle externe dans le cadre d'un modèle de von Kàrmàn multicouche par exemple [28, 29] ou considérer le profil $C_n^2(h)$ comme étant connu et trouver le profil de l'échelle externe $L_0(h)$ selon le modèle de von Kàrmàn multicouche ou autres [124]. L'exploitation d'une distribution statistique angulaire comme la fonction de structure angulaire pour la caractérisation des propriétés spatiales des effets de la turbulence optique n'est pas encore fixée et reste encore à être optimisée.

Il peut aussi apparaître qu'il existe encore d'autres pistes à explorer pour caractériser au mieux les propriétés statistiques et spectrales de la turbulence de jour à partir de fluctuations d'angle d'arrivée, mais pour pouvoir en tirer la moindre information il est nécessaire de pouvoir mesurer efficacement les fluctuations d'angle d'arrivée à partir des images du bord solaire, d'où ce qui suit.

3.7 Les fluctuations d'angle d'arrivée polychromatiques

Cet article, publié dans "*Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*" [17] est une étude statistique théorique des fluctuations d'angle d'arrivée dans le cas d'un rayonnement polychromatique incohérent dans le cas où l'on prend en compte la diffraction de Fresnel dans la description des fluctuations de phase au sol. La distribution spatiale de la scintillation dans la pupille n'est pas prise en compte [189]. Il en ressort néanmoins que la caractérisation de la turbulence optique à partir des mesures des fluctuations d'angle d'arrivée requiert une modélisation précise et rigoureuse de ces fluctuations afin de ne pas être handicapé par des approximations dont la validité n'est pas éprouvée. Il est surtout démontré que les fluctuations d'angle d'arrivée ne sont pas simplement décrites par sa définition dans le paragraphe 3.6 et qu'une modélisation plus précise est possible.

Fresnel diffraction and polychromatic effects on angle-of-arrival fluctuations

Amokrane Berdja^{1,2}, Julien Borgnino² and Abdenour Irbah³

¹ Centre de Recherche en Astronomie Astrophysique et Géophysique, BP 63, Route de l'Observatoire, 16340 Bouzaréah, Alger, Algeria

² Laboratoire Universitaire d'Astrophysique de Nice UMR 6525, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose F-06108 Nice Cedex 2, France

³ Service d'Aéronomie, CNRS, BP 63, 91371 Verrières le Buisson Cedex, France

E-mail: berdja@unice.fr, borgnino@unice.fr and irbah@aerov.jussieu.fr

Received 22 June 2005, accepted for publication 3 January 2006

Published 24 January 2006

Online at stacks.iop.org/JOptA/8/244

Abstract

Seeing monitoring in astronomy is widely based on the statistical analysis of angle-of-arrival (AA) fluctuations, which are usually modelled in the framework of the near-field approximation where diffraction through turbulence is ignored. They are consequently believed to be completely independent of wavelength. We discuss in this paper the influence of Fresnel diffraction from distant turbulence layers on multi-wavelength (polychromatic) AA fluctuations. For this purpose we propose a model for polychromatic AA fluctuations in weak turbulence conditions and derive an analytical model for their variance in the case where scintillation is ignored. We also present a numerical simulation that includes scintillation and justifies that this latter may be neglected in the analytical model.

Keywords: turbulence, atmospheric effects, high angular resolution, angle of arrival, seeing monitor

1. Introduction

For a long time now, turbulence has been well recognized as one of the major limitations to the quality of ground-based astronomical imaging [2–4]. Turbulence causes heterogeneous and time-changing refractive index fluctuations in the atmosphere and while propagating through, light waves from outer space undergo phase and amplitude perturbations [1]. Optical turbulence causes the astronomical images to be severely damaged [4] even if its effects can be more or less overcome today with some special observing techniques based on speckle interferometry [4, 9] and adaptive optics [7, 8]. It remains necessary however to have pertinent information on the optical turbulence effects (like image motion) [5] with the so-called seeing monitors.

Some seeing monitors like DIMM [10–12] and GSM [13, 14] are based on statistical analyses of angle-of-arrival (AA) fluctuations [15–17, 12]. The AA fluctuations are the local turbulence-induced angular deviations of light from its initial direction of incidence. They are responsible for the apparent motion of the astronomical output images whenever seen with a telescope. Image motion is shown [1] to be pro-

portional to the normalized averaging of the AA fluctuations all over an entrance pupil where they are weighted by the instantaneous intensity fluctuations resulting from scintillation. In all the following we will focus on these AA fluctuations at any given position on the entrance pupil of a telescope by looking into them as local contributors to turbulence-induced image motion.

Phase and amplitude fluctuations are known to depend upon wavelength [23] and they have been investigated from the polychromatic point of view [22, 24, 27]. The influence of scintillation on image motion has been also investigated [21, 25, 26] but we do not know actually if polychromatic AA fluctuations, or at least a clear justification of using the near-field approximation for them, have ever been discussed. It should be noted however that the diffraction effect on the pupil-related Zernike tilt (Z-tilt) [4] has been described in the monochromatic case [20]. We are investigating here the general case of polychromatic AA fluctuations without any entrance pupil effect. One may consider that Z-tilt is sufficiently equivalent to image motion (G-tilt) to be considered as a good approximation of the object of our study. However, Z-tilt in the most general case does participate

partially (together with other non-symmetrical Zernike modes) to image motion. A closer look (see for example [17]) shows also that Z-tilt and G-tilt are dissimilar with different spectra. They are thus differently influenced by diffraction. As stated before, we focus here on the local pupil-independent contributions to image motion, i.e., the AA fluctuations.

In the following we will briefly review the near-field approximation and its implications on the modelling of the AA fluctuations and then introduce diffraction in the polychromatic case.

2. Diffraction and the near-field approximation

Let $\varphi_0(\lambda, \vec{r})$ be the instantaneous turbulence-induced phase fluctuations of a monochromatic light wave at the entrance pupil. It depends upon wavelength λ and upon the two-dimensional position \vec{r} on the pupil. We do not care anywhere in this paper about the temporal evolution of the optical turbulence.

The monochromatic AA fluctuations $\vec{\alpha}(\lambda, \vec{r})$, defined as the local fluctuations of the normal at each point to the perturbed wavefront, are given by [1, 2]

$$\vec{\alpha}(\lambda, \vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi} \vec{\nabla} \varphi_0(\lambda, \vec{r}) \quad (1)$$

where $\vec{\nabla}$ denotes a two-dimensional spatial gradient.

We first recall the most basic results of the optical turbulence theory as formulated for astronomical observation. We consider for this purpose a single turbulent layer situated at an altitude h above the telescope. All results can easily be generalized afterwards to multi-layered turbulence.

The light's complex amplitude perturbations $\psi(\lambda, \vec{r})$ as expressed by phase and log-amplitude fluctuations (which are respectively denoted by $\varphi(\lambda, \vec{r})$ and $\chi(\lambda, \vec{r})$) are written [3] in the following manner:

$$\psi(\lambda, \vec{r}) = \exp[\chi(\lambda, \vec{r}) + i\varphi(\lambda, \vec{r})]. \quad (2)$$

In the thin-screen model [2], light propagation through the turbulence layer undergoes only phase fluctuations. The output phase fluctuations $\varphi_h(\lambda, \vec{r})$ at the altitude h are related to refractive index fluctuations $n(\lambda, \vec{r}, h)$ along the propagation path:

$$\varphi_h(\lambda, \vec{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_h^{h+\delta h} dh' n(\lambda, \vec{r}, h') \quad (3)$$

where δh denotes the layer thickness.

Light propagation from the layer output to the telescope pupil is correctly described by Fresnel diffraction [2]. It is important to note here that diffraction influences complex amplitude, i.e., both phase and log-amplitude. At ground level, phase and log-amplitude fluctuations are given by [2, 6]

$$\varphi_0(\lambda, \vec{r}) = \varphi_h(\lambda, \vec{r}) \otimes \frac{\sin\{\pi r^2/\lambda h\}}{\lambda h} \quad (4)$$

$$\chi_0(\lambda, \vec{r}) = \varphi_h(\lambda, \vec{r}) \otimes \frac{\cos\{\pi r^2/\lambda h\}}{\lambda h} \quad (5)$$

where \otimes denotes a two-dimensional spatial convolution product.

This result corresponds to the first-order Rytov solution of the corresponding wave propagation equation in the weak turbulence regime [4].

In describing long-exposure images within the framework of this model, it is clearly shown that blurring does not depend upon diffraction [2]. Indeed, long-exposure image blurring is related to the spatial covariance (second-order moment) of light's complex amplitude perturbations, which is invariant under Fresnel diffraction [2]. It is equivalent to having the whole turbulence situated at the telescope level, inducing only phase fluctuations. It is what is called the near-field approximation. What needs to be kept in mind is that long-exposure image blurring does not depend upon diffraction although phase and log-amplitude fluctuations do depend upon it. In other respects, the independence to diffraction of long-exposure image blurring does not mean at all that phase and log-amplitude do not depend upon diffraction.

The near-field approximation has been extended to phase fluctuations and thus to AA fluctuations. Diffraction is still in use however in describing log-amplitude fluctuations, which give rise to scintillation [19, 18]. Let us review now the incidence of the near-field approximation on AA fluctuations. We can easily see from equations (1) and (3) that AA fluctuations do not depend upon wavelength if we ignore the diffraction term which corresponds to the second factor in the convolution product of equation (4). We must also assume here that the refractive index fluctuations do not depend upon wavelength. It results that AA fluctuations are achromatic and are the same at any wavelength in the near-field approximation [12]. Assuming this, seeing monitors based on AA fluctuations have no spectral filters [12] in order to exploit maximum light flux on receptors. This achromatic approach of AA fluctuations allows also ignoring such considerations as stellar spectra and detector responses, leading to simpler treatments.

It is then justified to wonder whether the near-field approximation is sufficient to describe AA fluctuations correctly. We must also note that diffraction is expected to make AA fluctuations at different wavelengths somehow different from one another and more or less uncorrelated. For these reasons, we attempt in the following to model polychromatic (multi-wavelength) AA fluctuations by taking into account diffraction.

3. A model for polychromatic AA fluctuations

AA fluctuations are responsible for image motion in the telescope focal plane. Stellar image motion is obtained by the instantaneous centroid position. In this context, the stellar image position with polychromatic light is given by instantaneous intensity-related averaging of its different monochromatic contributors. We will thus consider the same formalism for polychromatic AA fluctuations. We must also suppose that the monochromatic components at different wavelengths are optically incoherent and that their combination is accurately expressed by carrying a summation through intensities without including interference. This is reasonably achieved with polychromatic bandwidths $\Delta\lambda$ far larger than individual atomic spectral emission-peak bandwidths.

In this manner, polychromatic AA fluctuations $\vec{\alpha}(\vec{r})$ can be seen as an average of their monochromatic contributors $\vec{\alpha}(\lambda, \vec{r})$ weighted by the intensity. The intensity is also partly affected by the instrument response and scintillation due to atmospheric turbulence. We can therefore write

$$\vec{\alpha}(\vec{r}) = \frac{\int_{\lambda_0 - \Delta\lambda/2}^{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} d\lambda \rho(\lambda) \exp\{2\chi_0(\lambda) + 2\chi(\lambda, \vec{r})\} \vec{\alpha}(\lambda, \vec{r})}{\int_{\lambda_0 - \Delta\lambda/2}^{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} d\lambda \rho(\lambda) \exp\{2\chi_0(\lambda) + 2\chi(\lambda, \vec{r})\}}. \quad (6)$$

$\chi_0(\lambda)$ is the non-perturbed log-amplitude, which is related to the stellar spectrum as transmitted through the atmosphere. $\chi(\lambda, \vec{r})$ is the turbulence-induced log-amplitude perturbation, which is responsible for scintillation. $\rho(\lambda)$ is a term describing the instrument intensity response.

In order to characterize the level of the polychromatic effect importance we will consider in our case a finite bandwidth $\Delta\lambda$ around a given central wavelength λ_0 . AA fluctuations in both achromatic and polychromatic approaches must be compared via their statistical properties because they are random quantities. We will limit ourselves to comparing their statistical variances.

4. Polychromatic AA fluctuations ignoring scintillation

If scintillation has to be ignored as a first approximation then we put $\chi(\lambda, \vec{r}) = 0$ in equation (6):

$$\vec{\alpha}(\vec{r}) = \frac{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda F(\lambda) \vec{\alpha}(\lambda, \vec{r})}{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda F(\lambda)} \quad (7)$$

where $F(\lambda) = \rho(\lambda) \exp\{2\chi_0(\lambda)\}$, $\lambda_a = \lambda_0 - \Delta\lambda/2$ and $\lambda_b = \lambda_0 + \Delta\lambda/2$.

As in real-life measurements, we just consider one component α of the AA fluctuations along a given direction such as $\alpha = \vec{\alpha} \cdot \vec{i}$ with $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. This does not in any case limit this study.

The statistical variance σ_α^2 of the polychromatic AA fluctuations α is given by

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda_1 \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda_2 F(\lambda_1) F(\lambda_2) \langle \alpha(\lambda_1, \vec{r}) \alpha^*(\lambda_2, \vec{r}) \rangle}{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda_1 \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda_2 F(\lambda_1) F(\lambda_2)} \quad (8)$$

where $\langle \rangle$ denotes ensemble averaging.

The statistical averaging that appears in equation (8) can be labelled the chromatic covariance for the wavelengths λ_1 and λ_2 (specifically at these wavelengths). It is expressed by

$$B_\alpha([\lambda_1, \lambda_2], \vec{0}) = \langle \alpha(\lambda_1, \vec{r}) \alpha^*(\lambda_2, \vec{r}) \rangle. \quad (9)$$

We recall that we are considering a single turbulence layer situated at an altitude h giving rise to AA fluctuations at the telescope entrance pupil.

Let us now denote $\vec{\varphi}_h(\lambda, \vec{f})$, the two-dimensional spatial Fourier transform of $\varphi_h(\lambda, \vec{r})$:

$$\varphi_h(\lambda, \vec{r}) = \int d\vec{f} \vec{\varphi}_h(\lambda, \vec{f}) \exp\{2\pi i \vec{f} \cdot \vec{r}\} = \text{FT}^{-1}\{\vec{\varphi}_h(\lambda, \vec{f})\}; \quad (10)$$

\vec{f} is the two-dimensional spatial frequency with $\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j}$ and $\text{FT}^{-1}\{\}$ denotes the inverse spatial Fourier transform.

Using equations (1) and (4), the monochromatic AA fluctuations are given by

$$\alpha(\lambda, \vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi} \text{FT}^{-1}\{2\pi i f_x \vec{\varphi}_h(\lambda, \vec{f}) \cos\{\pi \lambda h f^2\}\}. \quad (11)$$

The chromatic covariance can then be written as

$$B_\alpha([\lambda_1, \lambda_2], \vec{0}) = \lambda_1 \lambda_2 \int d\vec{f}_1 \int d\vec{f}_2 f_{1x} f_{2x} \times \cos\{\pi \lambda_1 h f_1^2\} \cos\{\pi \lambda_2 h f_2^2\} \langle \vec{\varphi}_h(\lambda_1, \vec{f}_1) \vec{\varphi}_h^*(\lambda_2, \vec{f}_2) \rangle. \quad (12)$$

The statistical term $\langle \vec{\varphi}_h(\lambda_1, \vec{f}_1) \vec{\varphi}_h^*(\lambda_2, \vec{f}_2) \rangle$ occurs in the framework of the near-field approximation, i.e., no diffraction at the layer output. We obtain thus after simple operations

$$\langle \vec{\varphi}_h(\lambda_1, \vec{f}_1) \vec{\varphi}_h^*(\lambda_2, \vec{f}_2) \rangle = \int d\vec{r}_1 \exp\{-2\pi i [\vec{f}_1 - \vec{f}_2] \cdot \vec{r}_1\} \times \int d\vec{\rho} \langle \varphi_h(\lambda_1, \vec{r}_1) \varphi_h(\lambda_2, \vec{r}_1 - \vec{\rho}) \rangle \exp\{-2\pi i \vec{f}_2 \cdot \vec{\rho}\}. \quad (13)$$

Here appears the spatial-and-chromatic covariance of phase fluctuations in the near-field approximation. This quantity has been already described [22, 24] and we will express it in a different shape:

$$\langle \vec{\varphi}_h^*(\lambda_1, \vec{f}_1) \vec{\varphi}_h(\lambda_2, \vec{f}_2) \rangle = W_{\varphi_h}^{\text{nf}}([\lambda_1, \lambda_2], \vec{f}_2) \delta\{\vec{f}_2 - \vec{f}_1\}; \quad (14)$$

nf denotes the use of the near-field approximation and δ denotes the Dirac function.

For example, in the case where the optical turbulence obeys the Von Kármán and Hill-Andrews models [31] then we can write

$$W_{\varphi_h}^{\text{nf}}([\lambda_1, \lambda_2], \vec{f}) = 0.3827 \frac{\sqrt{C_n^2(\lambda_1) C_n^2(\lambda_2) \delta h}}{\lambda_1 \lambda_2} \times [f^2 + L_0^{-2}]^{-11/6} [1 + 3.4310 f l_0 - 0.5384 [f l_0]^{7/6}] \times \exp\left\{-\left[\frac{2\pi f l_0}{3.3}\right]^2\right\} \quad (15)$$

where $C_n^2(\lambda)$ is the constant structure for refractive index fluctuations. L_0 and l_0 are respectively the outer and inner scales of the optical turbulence.

Because the refractive index depends intrinsically upon wavelength, it is natural that the constant structure $C_n^2(\lambda)$ depends upon wavelength too. Although it is important, we will not discuss this topic in this paper, which is restricted to the diffraction effects.

We also suppose here that l_0 and L_0 do not depend upon wavelength, allowing us to write $W_{\varphi_h}^{\text{nf}}([\lambda_1, \lambda_2], \vec{f})$ in this simplified form:

$$W_{\varphi_h}^{\text{nf}}([\lambda_1, \lambda_2], \vec{f}) = \frac{\sqrt{C_n^2(\lambda_1) C_n^2(\lambda_2) \delta h}}{\lambda_1 \lambda_2} G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(\vec{f}). \quad (16)$$

$G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(\vec{f})$ is the part of $W_{\varphi_h}^{\text{nf}}([\lambda_1, \lambda_2], \vec{f})$ that does not depend upon wavelength and this writing can apply to different optical turbulence models [28–30].

We then obtain

$$B_\alpha([\lambda_1, \lambda_2], \vec{0}) = \sqrt{C_n^2(\lambda_1) C_n^2(\lambda_2) \delta h} \int d\vec{f} f_x^2 \times \cos\{\pi \lambda_1 h f^2\} \cos\{\pi \lambda_2 h f^2\} G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(\vec{f}). \quad (17)$$

The variance becomes

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\int d\vec{f} G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(\vec{f}) f_x^2 \left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda F(\lambda) \sqrt{C_n^2(\lambda)} \cos\{\pi \lambda h f^2\} \right]^2 \delta h}{\left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda F(\lambda) \right]^2}. \quad (18)$$

Since $G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(\vec{f})$ is isotropic with respect to the spatial frequency \vec{f} , we finally obtain

$$\sigma_\alpha^2 = \left\{ \pi \int_0^\infty df G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(f) f^3 \left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda F(\lambda) \sqrt{C_n^2(\lambda)} \cos\{\pi \lambda h f^2\} \right]^2 \delta h \right\} \left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda F(\lambda) \right]^{-2}. \quad (19)$$

This result can also be generalized to the case where l_0 and L_0 have wavelength dependences.

4.1. Results

Diffraction effects on AA fluctuations in both monochromatic and polychromatic cases can be studied using equation (19). This is easily done by giving constant values to $F(\lambda)$ and $C_n^2(\lambda)\delta h$. We recall that we are still always ignoring scintillation.

In this case we will have

$$\sigma_\alpha^2 \propto \frac{\pi \int_0^\infty df G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(f) f^3 \left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \cos\{\pi \lambda h f^2\} \right]^2}{\left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \right]^2} \quad (20)$$

where \propto denotes proportionality.

The variance is numerically integrated according to equation (20) for different values of altitude h and wavelength bandwidth $\Delta\lambda$.

We will quantify the diffraction effect magnitude for a given altitude h and wavelength band $[\lambda_0, \Delta\lambda]$ by defining the ‘normalized difference’ $\text{ND}(\lambda_0, \Delta\lambda, h)$ as follows:

$$\text{ND}(\lambda_0, \Delta\lambda, h) = \frac{\sigma_\alpha^2(\lambda_0, \Delta\lambda, h) - \sigma_\alpha^2(\lambda_0, 0, 0)}{\sigma_\alpha^2(\lambda_0, 0, 0)}. \quad (21)$$

This quantity expresses the difference between the variance of AA fluctuations when diffraction is taken into account in theoretical models and when it is not. It is normalized with the variance of AA fluctuations when diffraction is ignored.

Because of the achromatism of the AA fluctuations in the near-field approximation, $\sigma_\alpha^2(\lambda_0, \Delta\lambda, 0)$ is equal to $\sigma_\alpha^2(\lambda_0, 0, 0)$.

4.2. Effect of diffraction on monochromatic AA fluctuations

Figure 1 shows the ‘normalized difference’ behaviour with altitude for some wavelengths in the monochromatic case, obtained by putting $\Delta\lambda = 0$ in equations (20) and (21). It is clearly observed that diffraction effects are far from being negligible for AA fluctuations. As can be seen in figure 1, the error is sufficiently important to question seriously the validity of the near-field approximation to describe AA fluctuation statistics.

We suppose indeed within the framework of the near-field approximation that AA fluctuations measured at ground level ($h = 0$) are the same as those arising from the turbulent

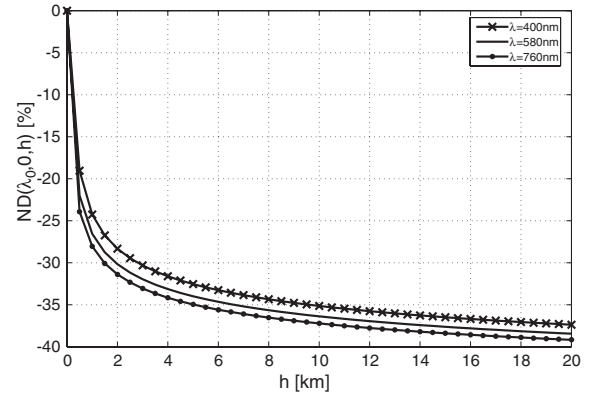


Figure 1. ‘Normalized difference’ behaviour with altitude in the monochromatic case according to equations (20) and (21). In this case L_0 and l_0 are taken respectively equal to 30 and 0.01 m. Samplings for numerical integrations are $\delta\lambda = 0.1$ nm and $\delta f = 0.005$ m⁻¹.

layer ($h \neq 0$) but in fact these latter have greater variance. AA fluctuations at the layer’s output level correspond to ground-based image blurring since this latter is not affected by diffraction. Neglecting diffraction leads to an overestimating of the astronomical imaging quality if deduced from ground AA fluctuation statistics. This point will be discussed in more detail in section 5.

We can notice here that variance is somehow more sensitive to altitude than to wavelength. We must however keep in mind that even if their variances are close one to the other, the instantaneous AA fluctuations at different wavelengths can be more or less uncorrelated. That is what is to be shown in the polychromatic case.

4.3. Effect of diffraction on polychromatic AA fluctuations

The ‘normalized difference’ versus altitude h , computed in the polychromatic case for a fixed central wavelength λ_0 and for different values of wavelength bandwidth $\Delta\lambda$, is displayed in figure 2. It is observed that measuring AA fluctuations on a wide wavelength bandwidth has a strong additive effect on the departure of their variance from the case where diffraction is ignored. This is due to the uncorrelated monochromatic AA fluctuations at different wavelengths when affected by diffraction.

We show here that the near-field approximation is not systematically justified in describing the AA fluctuation statistics and that both diffraction (altitude) and the polychromatic effects have to be taken into account. We do not make any statement about the turbulence height since this latter is supposed to be unknown and variable.

In the next section we will see an example of how the importance of diffraction in AA fluctuations can influence a concrete situation. We have chosen to look at seeing monitoring with DIMM.

5. Application to a seeing monitor: the DIMM case

A differential image motion monitor (DIMM) measures the difference between the instantaneous positions of the two

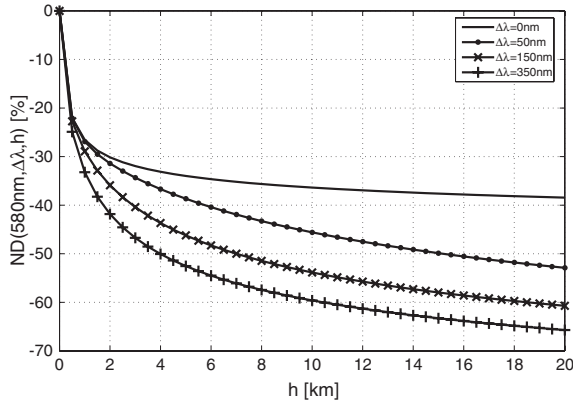


Figure 2. ‘Normalized difference’ behaviour with altitude in the polychromatic case according to equations (20) and (21). In this case $L_0 = 30$ m, $l_0 = 0.01$ m and $\lambda_0 = 580$ nm. Samplings for numerical integrations are $\delta\lambda = 0.1$ nm and $\delta f = 0.005$ m⁻¹.

images of a single star in its telescope focal plane. The dual image is obtained through two sub-apertures on the pupil plane [10]. Image motion is due to the averaging of AA fluctuations over each sub-aperture. A spatial frequency filtering occurs on AA fluctuations when averaged over the circular sub-apertures of diameter D and when the differential operation over the baseline \vec{B} is done.

The DIMM filtering function $\text{DIMM}(\vec{f})$ is given by [12, 16]

$$\text{DIMM}(\vec{f}) = 2 \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f} \right]^2 [1 - J_0\{2\pi f B\} + \cos\{2\gamma\} J_2\{2\pi f B\}] \quad (22)$$

where γ is the angle between the baseline and image motion’s orientation with $B\vec{i} = B \cos\{\gamma\}$. $J_n\{\}$ is the Bessel function of the first kind and n th order.

Differential image motion in a DIMM is usually computed in two particular configurations that are longitudinal and transversal, corresponding respectively to $\gamma = 0$ and $\pi/2$.

As was done to obtain equation (20), we attribute constant values to $F(\lambda)$ and $C_n^2(\lambda)\delta h$. The variance of the polychromatic differential image motion σ_{DIM}^2 is then written as

$$\sigma_{\text{DIM}}^2 \propto \left\{ \pi \int_0^\infty df G_{\varphi_h}^{\text{nf}}(f) f^3 \left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \times \cos\{\pi \lambda h f^2\} \right]^2 \text{DIMM}(\vec{f}) \right\} \left\{ \left[\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (23)$$

The astronomical imaging quality is usually characterized by the Fried parameter $r_0(\lambda_0)$ that relates to the long-exposure image width of an unresolved star [4]. Fried’s parameter is estimated using the DIMM from the variance of the differential image motion [10]. We will use the following expression in which analytical development is based on the near-field approximation:

$$r_0(\lambda_0) = [\sigma_{\text{DIM}}^2 / [2\lambda_0^2 [0.179D^{-1/3} - 0.145B^{-1/3} \times [1 - \cos\{\gamma\}/3]]]]^{-3/5}. \quad (24)$$

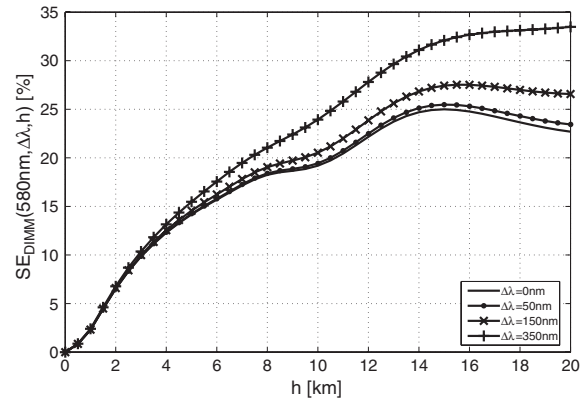


Figure 3. Plot of the ‘systematic error’ on the Fried parameter r_0 with respect to altitude according to equations (23) and (25). In this case $D = 4$ cm, $B = 20$ cm, $\gamma = 0$ (longitudinal differential image motion), $L_0 = 30$ m, $l_0 = 0.01$ m and $\lambda_0 = 580$ nm. Samplings for numerical integrations are $\delta\lambda = 0.1$ nm and $\delta f = 0.005$ m⁻¹.

Let us first suppose that a variance of differential image motion σ_{DIM}^2 corresponding to an unknown altitude h of a single layer turbulence has been measured at ground level.

Assuming the validity of the near-field approximation, we estimate $r_0^{\text{DIMM}}(\lambda_0)$ from σ_{DIM}^2 with equation (24) where σ_{DIM}^2 is in an unknown manner affected by diffraction and is computed using equation (4) in a case where $h \neq 0$. It is the Fried parameter obtained with a model that ignores diffraction and polychromatic effects.

One has rather to measure $r_0^{\text{real}}(\lambda_0, \Delta\lambda, h)$ that really characterizes the astronomical imaging quality on the ground. In this case we compute σ_{DIM}^2 using equation (23) with $h = 0$ and then estimate $r_0^{\text{real}}(\lambda_0, \Delta\lambda, h)$ using equation (24). This is equivalent to considering the DIMM situated at the turbulence layer’s output where equation (24) is valid.

We define a systematic error $\text{SE}_{\text{DIMM}}(\lambda_0, \Delta\lambda, h)$ that results from supposing the validity of the near-field approximation in estimating the Fried parameter with a DIMM. This systematic error is written as the following:

$$\text{SE}_{\text{DIMM}}(\lambda_0, \Delta\lambda, h) = \frac{r_0^{\text{DIMM}}(\lambda_0) - r_0^{\text{real}}(\lambda_0, \Delta\lambda, h)}{r_0^{\text{real}}(\lambda_0, \Delta\lambda, h)}. \quad (25)$$

This quantity expresses the relative departure of the estimated Fried parameter $r_0^{\text{DIMM}}(\lambda_0)$ when ignoring diffraction and polychromatic effects from the Fried parameter $r_0^{\text{real}}(\lambda_0, \Delta\lambda, h)$ that really defines the astronomical imaging quality.

The systematic error on $r_0(\lambda_0)$ estimations versus altitudes h is computed from a numerical integration of equation (23) in the case of a typical DIMM. Results are presented in figures 3 and 4 where longitudinal ($\gamma = 0$) and transversal ($\gamma = \pi/2$) differential image motion are respectively considered. They reveal that diffraction and polychromatic effects are still important and far from being negligible. It is probably significant to notice that this error is more important in the case of transversal differential image motion (figure 4) than in the case of longitudinal differential image motion (figure 3).

When measuring differential image motion at ground level one usually supposes that turbulence is localized close to the

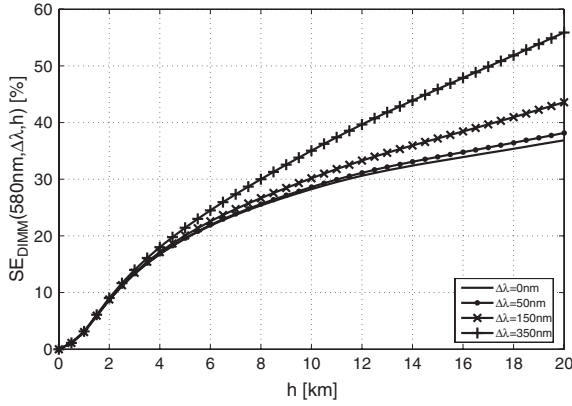


Figure 4. Plot of the ‘systematic error’ on the Fried parameter r_0 with respect to altitude according to equations (23) and (25). In this case $D = 4$ cm, $B = 20$ cm, $\gamma = \pi/2$ (transversal differential image motion), $L_0 = 30$ m, $l_0 = 0.01$ m and $\lambda_0 = 580$ nm. Samplings for numerical integrations are $\delta\lambda = 0.1$ nm and $\delta f = 0.005$ m $^{-1}$.

ground. In this specific situation the near-field approximation is justified and using equation (24) for example should give the Fried parameter that characterizes the astronomical imaging quality. However, for the optical turbulence arising from altitude $h \neq 0$, the differential image motion at ground level is affected by diffraction and polychromatic effects and has lower variance than differential image motion originating at the turbulence layer output. We have a situation where the astronomical imaging quality may appear unaltered by diffraction so that the Fried parameter has the same value at the turbulence layer output and at ground level. On the other hand the differential image motion is weakened by diffraction and polychromatic effects as if originating from weaker turbulence. It is then clear that the lower variance differential image motion will give a greater Fried parameter if one ignores diffraction and polychromatic effects. The Fried parameter and correlatively the astronomical imaging quality are clearly overestimated. This discussion does not reduce to DIMM but extends also to seeing monitoring using image motion in general. DIMM here is only a demonstrative example.

In order to minimize the polychromatic effect one can think to use wavelength filtering. A narrow wavelength filtering reduces the light flux and increases photonic noises. An optimal compromise between the systematic error due to the polychromatic effects and the dispersive error due to the photonic noises has thus to be found. Such a discussion requires more technical considerations but a filtering resolves the problem only moderately. One can see indeed from figures 3 and 4 that even with monochromatic light the diffraction effect is still non-negligible.

The solution in our opinion is simply to take into account diffraction and polychromatic effects in the models describing differential image motion, for example versus the optical turbulence parameters as we have done in equation (23).

It should be emphasized that applying a model that takes into account diffraction and polychromatic effects requires the knowledge of the turbulence distribution along altitude, or at least an estimate of the altitude of a single layer equivalent to the whole turbulent terrestrial atmosphere. This is not

actually possible with DIMM as far as we know, but such a model has to be useful to seeing monitors based on image motion measurement that also have the capability to estimate the turbulence altitude. The model we propose is a theoretical framework for interpreting observations with such instruments.

6. Polychromatic AA fluctuations without ignoring scintillation

A numerical simulation is performed in order to look into the contribution of scintillation to polychromatic AA fluctuations.

6.1. Simulation method

The purpose of the simulation is to obtain quasi-random samples (realizations) of AA fluctuation series with convenient statistical properties. To do so, we must generate simultaneous monochromatic log-amplitude fluctuations $\chi(\lambda, \vec{r})$ and AA fluctuations $\alpha(\lambda, \vec{r})$ in order to construct instantaneous polychromatic AA fluctuations with equation (6).

Optical turbulence-induced perturbations are usually obtained by inverse Fourier transforms of random complex functions of which the statistical variances are equal to the theoretical power spectra that correspond to given turbulence models [32]. The power spectrum of the monochromatic AA fluctuations we use is given by [31]

$$W_\alpha(\lambda, \vec{f}) = 0.3827 C_n^2(\lambda) \delta h f_x^2 [f^2 + L_0^{-2}]^{-11/6} \cos^2\{\pi \lambda h f^2\} \times [1 + 3.4310 f l_0 - 0.5384 [f l_0]^{7/6}] \exp\left\{-\left[\frac{2\pi}{3.3} f l_0\right]^2\right\}. \quad (26)$$

The power spectrum of the monochromatic log-amplitude fluctuations is also obtained in a similar manner by

$$W_\chi(\lambda, \vec{f}) = 0.3827 \frac{C_n^2(\lambda) \delta h}{\lambda^2} [f^2 + L_0^{-2}]^{-11/6} \sin^2\{\pi \lambda h f^2\} \times [1 + 3.4310 f l_0 - 0.5384 [f l_0]^{7/6}] \exp\left\{-\left[\frac{2\pi}{3.3} f l_0\right]^2\right\}. \quad (27)$$

Whenever we are concerned with spatial-like distributions of optical quantities like AA fluctuations or log-amplitude fluctuations, we can write

$$\alpha(\lambda, \vec{r}) = \text{FT}^{-1} \left\{ R_1(\vec{f}) \sqrt{W_\alpha(\lambda, \vec{f})} \exp\{i R_2(\vec{f})\} \right\} \quad (28)$$

$$\chi(\lambda, \vec{r}) = \text{FT}^{-1} \left\{ R_1(\vec{f}) \sqrt{W_\chi(\lambda, \vec{f})} \exp\{i R_2(\vec{f})\} \right\}$$

where $R_1(\vec{f})$ and $R_2(\vec{f})$ are independent random numbers with respectively normal distributions with unitary variances, and uniform distributions with $0 \leq R_2(\vec{f}) < 2\pi$.

The Fourier transforms in equation (28) are often performed numerically with the well-known fast Fourier transform optimized procedure. This procedure imposes a regular sampling of spatial frequencies, a sampling which sometimes is not very well adapted to the spectrum shape [32]. Moreover, because the same frequencies are used for all realizations, the resulting statistical moments are those of a scale-shaped function rather than being those of a continuous power spectrum. For this reason we choose to deal with a

semi-random sampling of spatial frequencies. This sampling is homogeneous at large scale in order to ensure equilibrated presence for all frequency domains, like in the energy-cascade model [2]. Sampling is also locally randomly distributed in order to statistically ensure a complete coverage of the spectrum through many realizations. This approach is globally inspired from the random wavevectors (RWV) method [33].

Semi-random sampling is achieved by superposing small random shifts $\vec{\xi}(\vec{f}) = \xi_x(\vec{f})\vec{i} + \xi_y(\vec{f})\vec{j}$ to every frequency \vec{f} of a regular sampling. If Δf denotes the grid's sampling path then $0 \leq \xi_x(\vec{f}) < \Delta f$ and $0 \leq \xi_y(\vec{f}) < \Delta f$.

The numerical integration giving rise to a given realization of the simultaneous monochromatic contributors can be summarized as follows:

$$\alpha(\lambda, \vec{r}) = \frac{4\sqrt{0.3827}}{\sqrt{2}} \sqrt{C_n^2(\lambda)\delta h} \sum_{f_x, f_y > 0} \Delta f R_1(\vec{f}) \times \frac{\exp\{-1.8126l_0^2|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|^2\}}{[|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|^2 + L_0^{-2}]^{11/12}} \times [f_x + \xi_x] \cos\{\pi\lambda h|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|^2\} \times \cos\{2\pi\vec{r}[\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})] + R_2(\vec{f})\} \times [1 + 3.4310|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|l_0 - 0.5384[|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|l_0]^{7/6}]^{1/2} \quad (29)$$

$$\chi(\lambda, \vec{r}) = \frac{4\sqrt{0.3827}}{\lambda\sqrt{2}} \sqrt{C_n^2(\lambda)\delta h} \sum_{f_x, f_y > 0} \Delta f R_1(\vec{f}) \times \frac{\exp\{-1.8126l_0^2|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|^2\}}{[|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|^2 + L_0^{-2}]^{11/12}} \sin\{\pi\lambda h|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|^2\} \times \cos\{2\pi\vec{r}[\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})] + R_2(\vec{f})\} \times [1 + 3.4310|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|l_0 - 0.5384[|\vec{f} + \vec{\xi}(\vec{f})|l_0]^{7/6}]^{1/2}. \quad (30)$$

The constant value 4 in these equations is needed because we use one quarter of the spatial frequency plane since f_x and f_y are restricted to be positive. The other constant value $\sqrt{2}$ in the denominators is there because cosine functions are used rather than exponential functions to perform the Fourier transform. The most important constraint in the simulation is to ensure that the random quantities $R_1(\vec{f})$, $R_2(\vec{f})$ and $\vec{\xi}(\vec{f})$ are the same for all simulated quantities for every single realization.

6.2. Application to a discrete spectrum with finite bandwidth

For this simulation, we will force $\rho(\lambda)\exp\{2\chi_0(\lambda)\}$ in equation (6) to have a constant value. In this case, the expression of polychromatic AA fluctuations along a given direction is given by

$$\alpha(\vec{r}) \approx \frac{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \exp\{2\chi(\lambda, \vec{r})\}\alpha(\lambda, \vec{r})}{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \exp\{2\chi(\lambda, \vec{r})\}}. \quad (31)$$

We will also consider that $C_n^2(\lambda) = C_n^2(\lambda_0)$, where λ_0 is the central wavelength.

We simulate monochromatic AA fluctuations and log-amplitude fluctuations using equations (29) and (30) with $\vec{r} = \vec{0}$. Wavelength values λ range with a regular sampling from $-\Delta\lambda_{\max}/2$ to $+\Delta\lambda_{\max}/2$, where $\Delta\lambda_{\max}$ is

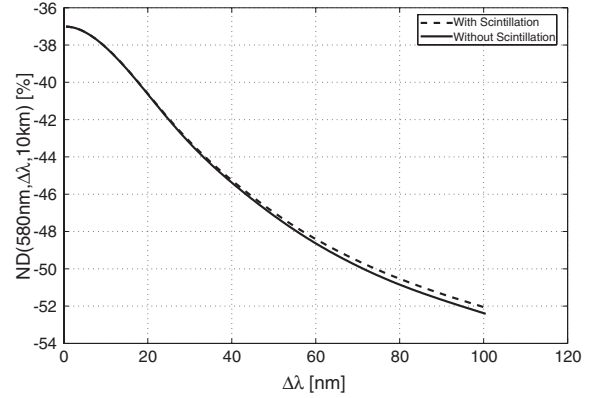


Figure 5. Plot of the 'normalized difference' (see equation (21)) on variances with respect to wavelength bandwidth as obtained with numerical simulation. In this case $L_0 = 30$ m, $l_0 = 0.01$ m, $\lambda_0 = 580$ nm, $h = 10$ km, $r_0(\lambda_0) = 0.1$ m, the number of independent realizations is $N = 2000$ and the sampling of wavelengths is $\delta\lambda = 0.25$ nm.

the maximum spectral bandwidth that we want to reach. Polychromatic AA fluctuations of various bandwidths $\Delta\lambda$ are obtained by doing the summation of more or less simultaneous monochromatic contributions around the λ_0 -contribution according to equation (31). The variance is finally computed through a great number of independent polychromatic AA fluctuations samples.

This simulation can easily be adapted to more realistic conditions by considering that the stellar spectrum, the detector response and optical turbulence parameters depend upon wavelength. These parameters include not only the structure constant of refractive index $C_n^2(\lambda)$ but probably both the outer scale L_0 and the inner scale l_0 of the optical turbulence too. The approximations we assume are still, however, sufficient to identify the importance or not of the phenomenon.

6.3. Results

Figure 5 presents the scintillation effects on the normalized difference defined in equation (21). It is computed versus variable wavelength bandwidth centred around λ_0 in standard turbulence conditions. The figure shows clearly that scintillation has very negligible effect on polychromatic AA fluctuations and may be ignored in the models. This small effect can be explained by looking at equation (31). If we assume that monochromatic scintillation is much more sensitive to wavelength than monochromatic AA fluctuations, the denominator of this equation will be statistically less fluctuating than the numerator and be considered as relatively constant. If log-amplitude fluctuations are very small, i.e., $\chi(\lambda, \vec{r}) \ll 1$, the intensity variation term $\exp\{2\chi(\lambda, \vec{r})\}$ can be approximated by $1 + 2\chi(\lambda, \vec{r})$. The equation expressing polychromatic AA fluctuations may be approximated with

$$\alpha(\vec{r}) \approx \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda [\alpha(\lambda, \vec{r}) + 2\chi(\lambda, \vec{r})\alpha(\lambda, \vec{r})]. \quad (32)$$

The variance is then given by

$$\sigma_\alpha^2 \approx \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda_1 \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda_2 [\langle \alpha(\lambda_1, \vec{r})\alpha(\lambda_2, \vec{r}) \rangle]$$

$$\begin{aligned}
& + 4\langle \chi(\lambda_1, \vec{r}) \alpha(\lambda_1, \vec{r}) \chi(\lambda_2, \vec{r}) \alpha(\lambda_2, \vec{r}) \rangle \\
& + 4\langle \chi(\lambda_1, \vec{r}) \alpha(\lambda_1, \vec{r}) \alpha(\lambda_2, \vec{r}) \rangle. \quad (33)
\end{aligned}$$

The first statistical term in the integral in equation (33) is that of the case where scintillation is ignored. The second and third terms in the integral are negligible compared to the first term. The reason is that log-amplitude fluctuations are more dependent on wavelength than AA fluctuations. This means that $\chi(\lambda_1, \vec{r})$ and $\chi(\lambda_2, \vec{r})$ are much more uncorrelated than $\alpha(\lambda_1, \vec{r})$ and $\alpha(\lambda_2, \vec{r})$. In addition $\chi(\lambda_1, \vec{r})$ and $\alpha(\lambda_2, \vec{r})$ are highly uncorrelated too.

These considerations may show why the simulation justifies ignoring scintillation when dealing with AA fluctuations in section 4. However, scintillation cannot be ignored in image motion through a finite aperture because there will appear terms of spatial covariance of log-amplitude fluctuations that are important and not negligible at all [27].

7. Conclusion

In discussing the validity of the near-field approximation when the AA fluctuations are observed, it has been shown that diffraction from distant turbulence layers has necessarily to be taken into account. This approximation and its consequence, the non-chromaticity of the AA fluctuations, are questioned.

We have shown how the effect of diffraction manifests itself mainly through two aspects. In the case of dealing with monochromatic light, the AA fluctuations for fixed turbulence strength are very dependent upon the height of turbulence above the ground (figure 1). It has been also noted that the variance of monochromatic AA fluctuations has a relatively weaker dependence upon wavelength. In the case of dealing with polychromatic AA fluctuations we find that the departure from the near-field approximation case is as large as the wavelength bandwidth is large. The difference is important (figure 2) and results from the combination of the altitude effect and the wavelength bandwidth. The polychromatic effect is due to the monochromatic AA fluctuations, which are uncorrelated because of diffraction.

With simulation we find that scintillation has a very weak impact (figure 5) but its effect is not negligible in image motion. Simulation has confirmed in fact the validity of the analytical model we propose, where scintillation is ignored in describing polychromatic AA fluctuations.

As a demonstrative example we have applied the model of polychromatic AA fluctuations to image motion in DIMM and

estimated the systematic error in estimating Fried's parameter as a characterization of astronomical imaging quality. We have shown that when using a model that ignores diffraction, the near-field approximation being assumed, one overestimates the Fried parameter and consequently the astronomical imaging quality with respect to its real state. Seeing monitoring through AA fluctuations (or image motion) has thus to take into account both diffraction and polychromatic effects.

References

- [1] Tatarskii V I 1971 *The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation (Israel Program for Scientific Translations)*
- [2] Roddier F 1981 *Prog. Opt.* **19** 281–376
- [3] Coulman C E 1985 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **23** 19–57
- [4] Roggemann M C and Welsh B M 1996 *Imaging Through Turbulence* (Boca Raton, FL: CRC Press LCC)
- [5] Borgnino J 2004 *Astronomy with High Contrast Imaging (EAS Publications Series)* vol 12, pp 103–24
- [6] Hickson P and Lanzetta K 2004 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **116** 1143–52
- [7] Beckers J M 1993 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31** 13–62
- [8] Roddier F 1999 *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [9] Aime C 2001 *Eur. J. Phys.* **22** 169–84
- [10] Sarazin M and Roddier F 1990 *Astron. Astrophys.* **277** 294–300
- [11] Sarazin M and Tokovinin A 2001 *Beyond Conventional Adaptive Optics (ESO Conf. Proc.) (Venice)* pp 7–10
- [12] Tokovinin A 2002 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **114** 1156–66
- [13] Ziad A 2000 *Appl. Opt.* **39** 5415–25
- [14] Martin F *et al* 2000 *Astron. Astrophys. Suppl.* **144** 39–44
- [15] Martin H M 1987 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **99** 1360
- [16] Avila R *et al* 1997 *J. Opt. Soc. Am. A* **14** 3070–82
- [17] Tokovinin A 2002 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **114** 1156–66
- [18] Andrews L C *et al* 1999 *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 1417–29
- [19] Dravins D *et al* 1997 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **109** 173–207
- [20] Sasiela R J 1994 *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence* (Berlin: Springer)
- [21] Tavis M T and Yura H T 1987 *J. Opt. Soc. Am. A* **4** 57–9
- [22] Borgnino J *et al* 1989 *J. Opt. Soc. Am. A* **6** 244–51
- [23] Dravins D *et al* 1997 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **109** 725–37
- [24] Berio P *et al* 1999 *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 872–81
- [25] Voitsekhovich V V *et al* 2001 *Astron. Astrophys.* **368** 1133–6
- [26] Voitsekhovich V V *et al* 2002 *Rev. Mex. Astron. Astrophys.* **38** 193–8
- [27] Tokovinin A A 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 686–9
- [28] Borgnino J 1990 *Appl. Opt.* **29** 1863–5
- [29] Borgnino J 1992 *Opt. Commun.* **91** 267–79
- [30] Voitsekhovich V V 1995 *J. Opt. Soc. Am. A* **12** 1346–53
- [31] Innocenti C and Consortini A 2004 *Proc. SPIE* **5237** 25–30
- [32] Lane R G *et al* 1992 *Waves Random Media* **2** 209–24
- [33] Voitsekhovich V V *et al* 1999 *Appl. Opt.* **38** 3985–92

3.8 Cas idéal : image d'un bord solide en présence d'une turbulence optique isoplanétique

Dans le cas des images longue-pose du bord solaire, on a vu que la position du limbe était par convention définie par celle du point d'inflexion. Le point d'inflexion représente la position où la variation d'intensité est la plus forte. Son calcul se fait le plus souvent en deux étapes. Dans un premier temps on calcule la dérivée du profil d'intensité autour du bord. Une première estimation de la position du limbe est donnée par la position du maximum de cette dérivée, qui donne la position de la plus forte variation de l'intensité. Un affinement de ce résultat est obtenu en faisant une seconde dérivation autour de cette première estimation et en estimant la position du passage par la valeur zéro de cette dérivée seconde du profil d'intensité en interpolant localement [133]. Cette approche est d'autant simple que la PSF longue-pose est symétrique et possède un maximum d'intensité unique, le retrait du bord solaire en longue-pose étant dû on l'a vu, à la dissymétrie de la dérivée première de la fonction d'assombrissement centre-bord.

Dans le cas des images courte-pose ou quasi-instantanées du bord solaire la situation est différente. Les PSF peuvent être dissymétriques et présenter plusieurs maxima lorsque la turbulence optique est forte ou que la taille de la pupille est plus grande que r_0 . Ceci s'ajoute à l'effet d'agitation qu'on veut mesurer. On va donc dans un premier temps voir si cette méthode du point d'inflexion peut à elle seule rendre compte de l'effet de la turbulence optique sur l'agitation qui affecte le bord solaire et si elle permet de mesurer l'effet d'agitation tel qu'il est défini pour les PSF.

Considérons pour cela un bord sous la forme d'une fonction de Heaviside. C'est un bord qui ne présente pas d'assombrissement centre-bord continu comme le Soleil mais la discontinuité de l'intensité dans cette fonction s'appliquerait à un corps solide sans atmosphère. Dans une première approximation le bord lunaire peut être considéré comme étant modélisable par une fonction de ce type. Une meilleure représentation de la surface lunaire ne serait pas uniforme mais en ce qui concerne les effets strictement liés à la position du limbe on peut raisonnablement se contenter d'une Heaviside.

On peut regarder ce qui se passe au niveau de l'image du bord. On ne considère qu'une coupe de l'image dans le sens de l'assombrissement, ce qui correspond en pratique à ne prendre qu'une colonne dans l'image obtenue avec un CCD bien qu'on n'ait pas introduit les effets de pixelisation dans nos simulations. On considère la turbulence optique isoplanétique. Ceci revient à ne considérer que la contribution de la turbulence proche du sol qui en terme d'énergie de la turbulence présente la contribution la plus significative pour les observations de jour.

L'image du bord solaire dans le champ de vision du télescope est définie dans un repère cartésien d'angles θ_x dans le sens de l'assombrissement et θ_y dans le sens parallèle au bord. Le bord de la fonction Heaviside qui représente la distribution angulaire de l'intensité de l'objet solide rayonnant et localisé à

un angle donné $\theta_x = \theta_b$. Si on néglige l'effet de la courbure du bord, celui-ci est localement plan et on peut définir la fonction d'assombrissement $I_0(\theta_x - \theta_b, \theta_y)$ comme étant donnée par

$$I_0(\theta_x - \theta_b, \theta_y) = \begin{cases} 0 & \theta_x < \theta_b \\ 1/2 & \theta_x = \theta_b \\ 1 & \theta_x > \theta_b \end{cases} \quad (3.12)$$

Comme la turbulence optique est isoplanétique, l'image obtenue au foyer du télescope $I_0(\theta_x, \theta_y)$ est un produit de convolution entre cette distribution d'intensité et la PSF instantanée normalisée et centrée $PSF^{NC}(\theta_x, \theta_y)$.

$$I(\theta_x, \theta_y) = I_0(\theta_x - \theta_b, \theta_y) \otimes PSF^{NC}(\theta_x, \theta_y) \quad (3.13)$$

Il est plus simple cependant au vu de la forme de la fonction $I_0(\theta_x - \theta_b, \theta_y)$ de traiter le problème à 1-dimension de manière à avoir

$$I(\theta_x) = I_0(\theta_x - \theta_b) \otimes PSF^{1D}(\theta_x) \quad (3.14)$$

où la PSF isoplanétique instantanée réduite $PSF^{1D}(\theta_x)$ est donnée par

$$PSF^{1D}(\theta_x) = \int d\theta_y PSF^{NC}(\theta_x, \theta_y) \quad (3.15)$$

La fonction $I_0(\theta_x - \theta_b)$ est identique à $I_0(\theta_x - \theta_b, \theta_y)$ avec une valeur θ_y fixée quelconque.

On remarque que l'effet de la turbulence optique isoplanétique instantanée peut schématiquement être décrite selon deux actions. Un premier effet visible est un étalement du bord à cause de la largeur angulaire moyenne des PSF instantanées. Le second effet visible est l'agitation par rapport à une position moyenne de ce bord étalé. La figure 3.3 est une illustration de ces effets qui peut être indifféremment obtenue avec l'une ou l'autre convolution.

Pour mesurer cette agitation, on est tenté de mesurer la position du point d'inflexion. Ceci passe forcément par une dérivation du bord.

Faire la "dérivée du bord" revient à dériver la fonction d'intensité $I(\theta_x)$ par rapport à θ_x . Les propriétés du produit de convolution nous permettent d'écrire

$$\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x} = \frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x} \otimes PSF^{1D}(\theta_x) \quad (3.16)$$

La dérivée d'une fonction de Heaviside est connue, c'est la distribution impulsionnelle de Dirac $\delta\{\theta_x - \theta_b\}$ qui est définie par

$$\delta\{\theta_x - \theta_b\} = \begin{cases} \int d\theta_x \delta\{\theta_x - \theta_b\} = 1 \\ 0 \end{cases} \quad \theta_x \neq \theta_b \quad (3.17)$$

La dérivée du profil d'intensité dans l'image est donc donnée par

$$\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x} = \delta\{\theta_x - \theta_b\} \otimes PSF^{1D}(\theta_x) \quad (3.18)$$

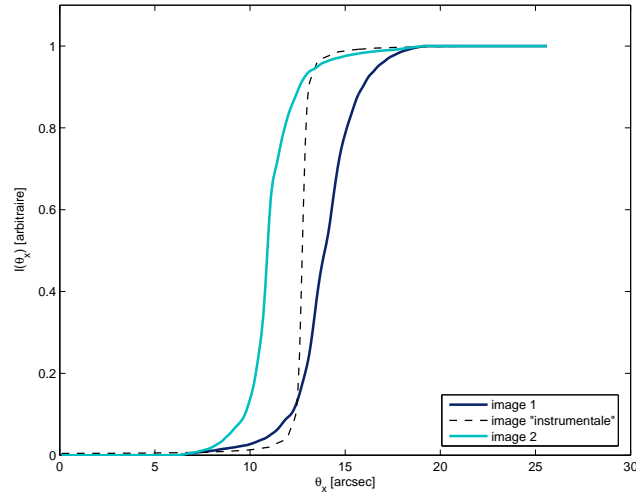


FIG. 3.3 – Le bord "instrumental" est l'image qu'on aurait d'une fonction de Heaviside à travers un télescope de diamètre $D=25$ cm avec une obstruction centrale d'un diamètre de $D'=5$ cm à la longueur d'onde $\lambda=535.7$ nm. Les images 1 et 2 sont les images de ce même bord à travers la turbulence optique dans le cas isoplanétique (couche au sol $h=0$). Dans ce cas on a pris $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn. L'effet de pixelisation n'est pas pris en compte. On peut remarquer l'étalement qui affecte chacun des deux profils d'intensité par rapport au profil "instrumental" et l'agitation qui les affecte par rapport à une position moyenne donnée.

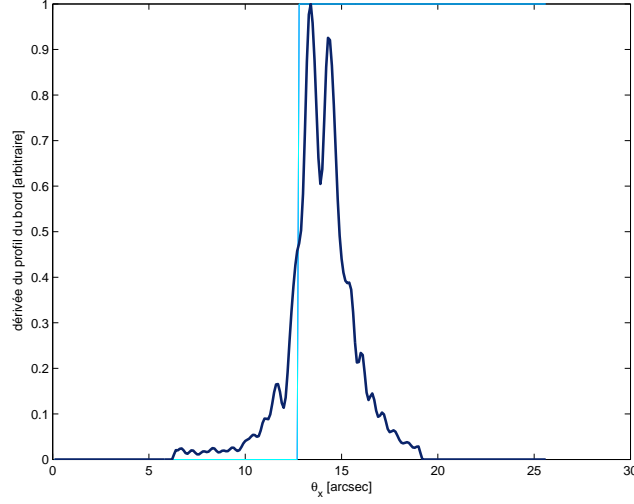


FIG. 3.4 – La dérivée du limbe perturbé par la turbulence optique dans le cas de l'image d'une fonction de Heaviside à travers un télescope de diamètre $D=25$ cm avec une obstruction centrale d'un diamètre de $D'=5$ cm à la longueur d'onde $\lambda=535.7$ nm. La dérivée du bord donne la PSF réduite à 1-dimension et la mesure de l'agitation est donnée par définition par les fluctuations (d'une image à une autre) de la position du photocentre de cette PSF (et donc de la dérivée du bord). Dans ce cas on a pris $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn. L'effet de pixelisation n'est pas pris en compte.

On obtient alors

$$\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x} = PSF^{1D}(\theta_x - \theta_b) \quad (3.19)$$

Cela veut dire qu'en faisant la dérivée du bord on obtient exactement la PSF instantanée réduite $PSF^{1D}(\theta_x)$ à l'emplacement du bord. C'est ce qu'on obtient aussi numériquement comme le montre la figure 3.4.

Il faut remarquer que l'agitation est définie comme fluctuation de la position du photocentre de la PSF instantanée. Dans ce cas précis où la dérivée du bord est la PSF (réduite à une dimension) le calcul du point d'inflexion dans le cas général d'une PSF élatée en *speckles* n'a pas de sens, d'autant plus qu'il s'agira d'identifier un maximum dans la PSF et le passage par zéro d'une dérivée de la PSF réduite. Ceci dépend évidemment de la forme instantanée que prend la PSF et l'information sur l'agitation est complètement brouillée. Cette limitation de la méthode du point d'inflexion peut être réduite en réduisant la taille de la pupille d'entrée de l'instrument jusqu'à ce qu'elle soit de l'ordre de r_0 ou un peu moins. Dans ce cas les PSF sont symétriques et ne forment qu'une tache unique de telle manière que la position du point d'inflexion donne la position du photocentre de la dérivée du bord, qui est le photocentre de la PSF réduite dont les fluctuations

sont les mesures de l'agitation induite par la turbulence optique. Dans ce cas de bord discontinu il est mieux de mesurer l'agitation directement par la position du photocentre de la dérivée du bord alors qu'il est très déconseillé de mesurer la position du point d'inflexion sur des images d'un bord discontinu comme le bord lunaire avec des pupilles grandes devant r_0 car ce n'est pas l'agitation qu'on mesure. Les fluctuations de la position du photocentre de la dérivée du bord ne donne les mesures d'agitation que parce que la dérivée de la fonction Heaviside est une fonction impulsionnelle de Dirac. Dans la réalité, et notamment pour les images du bord solaire, on doit prendre en compte la fonction d'assombrissement centre-bord qui convolue la PSF instantanée.

3.9 Cas d'un bord solaire en présence d'une turbulence optique isoplanétique

Le bord solaire ne présente pas de discontinuité de luminosité comme un objet solide (le bord lunaire) mais un assombrissement centre-bord continu comme on l'a vu au paragraphe 2.2.1. On va donc se baser pour modéliser cet assombrissement sur le modèle décrit par l'équation 2.3.

On considère dans un premier temps le cas isoplanétique pour la turbulence optique. Ceci revient à ce que la dérivée de l'image du bord solaire obtenue à travers la turbulence optique s'écrive encore une fois comme dans l'équation 3.16.

Cependant, la dérivée du bord non-perturbé $\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}$ n'est pas une distribution de Dirac mais une fonction "quelconque" avec une largeur angulaire et qui en plus dépend de la longueur d'onde. Pour $\lambda = 535.7$ nm, cette fonction a une largeur de l'ordre de 0.3 seconde d'arc à environ 35% de sa hauteur. Cette fonction est représentée dans la figure 3.5. La dérivée du bord perturbé $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ va être une convolution de cette fonction $\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}$ par la PSF (PSF réduite en 1-dim).

Pour que cette approximation (isoplanétique) soit acceptable au premier ordre, il faut que la largeur de $\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}$ qui convolue la PSF isoplanétique soit inférieure à l'angle d'isoplanétisme de la turbulence optique. On peut avoir un ordre de grandeur satisfaisant de l'angle isoplanétique à partir de la grandeur θ_{AO} retenue pour l'optique adaptative. Définie à partir du modèle dit de Kolmogorov elle est donnée par [148, 86]

$$\theta_{AO}(\lambda) = 0.31r_0(\lambda)/h_{AO} \quad (3.20)$$

où la quantité h_{AO} est donnée par

$$h_{AO} = \left[\frac{\int_0^{h_{max}} dh C_n^2(h) h^{5/3}}{\int_0^{h_{max}} dh C_n^2(h)} \right]^{3/5} \quad (3.21)$$

On peut considérer le profil de turbulence $C_n^2(h)$ de Hufnagel comme étant représentatif de la turbulence optique diurne. Celui-ci est donné par [151]

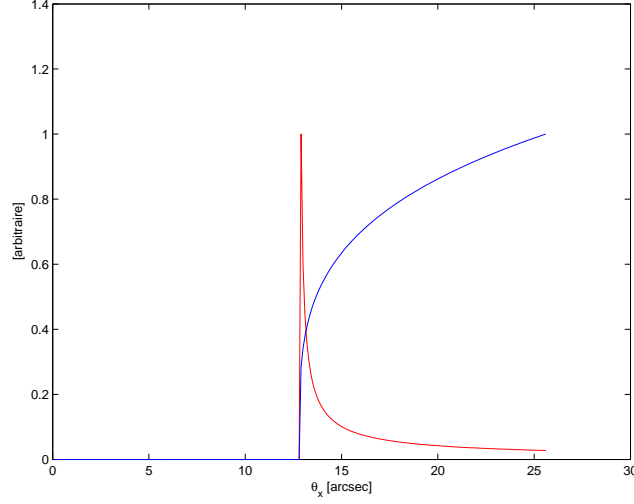


FIG. 3.5 – En bleu la fonction d'assombrissement centre-bord à $\lambda=535.7$ nm. En rouge la dérivée de cette fonction.

$$C_n^2(h) = 5.94 \times 10^{-53} \left[\frac{v}{27} \right]^2 h^{10} \exp \left\{ \frac{-h}{1000} \right\} + 2.7 \times 10^{-16} \exp \left\{ \frac{-h}{1500} \right\} + A \exp \left\{ \frac{-h}{100} \right\} \quad (3.22)$$

avec v et A des paramètres typiquement fixés à $v = 21$ m/s et $A = 1.7 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$.

Avec ce profil on trouve une couche turbulente équivalente à une hauteur $h_{AO} \approx 2223.5$ m. Pour une valeur moyenne du paramètre de Fried $r_0(535.7nm) = 4$ cm on obtient alors un angle isoplanétique de l'ordre de $\theta_{AO} \approx 1.15$ secondes d'arc.

On peut en conclure qu'au premier ordre l'approximation isoplanétique pour les effets de la turbulence optique au bord solaire est satisfaisante. La dérivée du bord fait apparaître la convolution d'une PSF localement isoplanétique avec la dérivée du bord non-perturbé. L'effet anisoplanétique au delà de ce bord (vers l'intérieur) fera apparaître des variations d'intensité (plus étalées et moins importantes que celles dues au bord) qu'on ignorera pour l'instant et qu'on discutera plus tard.

Comme on peut le voir dans la figure 3.6, la dérivée du profil de bord solaire $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ est différente de la PSF réduite associée à un bord solide. On peut très schématiquement distinguer un "pic-PSF" et une sorte de "pied" non-nul vers l'intérieur du profil du bord. Le "pic-PSF" est la partie qui correspond plus ou moins à la PSF réduite. Comme c'est juste une convolution avec la partie

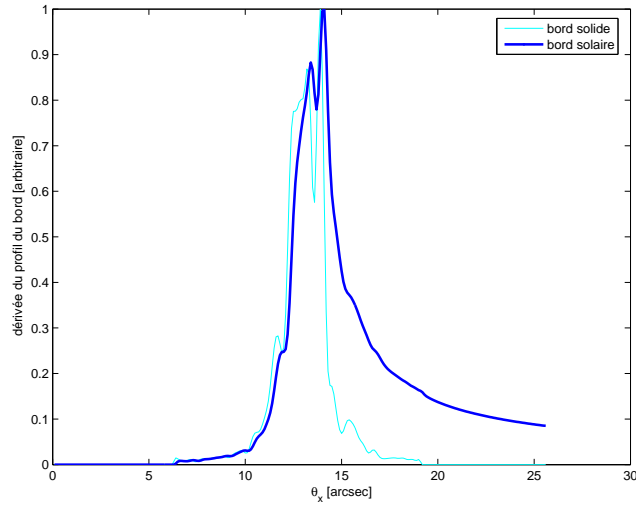


FIG. 3.6 – La dérivée du bord $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ en bleu foncé pour le bord solaire (avec assombrissement) comparée à la dérivée du bord $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ en bleu clair pour un bord de type Heaviside avec la même perturbation. Dans ce deuxième cas on obtient la PSF réduite qui est angulairement limitée et dans le cas du bord solaire réel on obtient une convolution de cette PSF réduite qui n'est pas angulairement limitée vers l'intérieur du disque solaire. Dans ce cas on a pris $D=25$ cm, $D'=5$ cm, $\lambda=535.7$ nm, $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn.

"impulsionnelle" de la fonction $\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}$ (non-fluctuante) alors elle garde une partie de l'information sur la forme de la PSF réduite. Si cette dernière est une figure de *speckles* (speckles à une dimension résultant de l'intégration des *speckles* à deux dimensions), alors $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ montre aussi un profil en *speckles*. Ceci nous prévient encore d'utiliser une méthode comme celle de la détection du point d'inflexion du bord pour mesurer l'agitation. Comme $\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}$ est non-fluctuante, l'information sur l'agitation doit être elle aussi gardée dans ce "pic-PSF", d'autant plus que dans cette configuration de turbulence optique isoplanétique la même agitation affecte toutes les parties de l'image.

Le problème qui se pose est que la fonction $\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}$ ne s'annule pas complètement à l'intérieur (vers le centre du Soleil dans l'image) de la partie "impulsionnelle" qui définit le bord, ce qui fait apparaître le "pied" dans le profil de l'image du bord, qui s'étend bien au delà de la zone isoplanétique qui nous concerne autour du bord. D'autre part, le fait que la dérivée ne s'annule pas nous empêche de mesurer la position de son photocentre comme cela aurait été possible avec la PSF réduite.

Cet effet de la forme de la fonction d'assombrissement centre-bord n'est pas une fatalité en soi et peut être contourné dans certains cas. Une première approche serait de faire un seuillage adéquat de la dérivée du profil d'intensité de l'image du bord solaire.

3.10 Seuillage de la dérivée du profil du bord

Afin de séparer les contributions du "pic-PSF" et du "pied" pour d'une part pouvoir calculer la position du photocentre et d'autre part se limiter à la zone isoplanétique, on est tenté de faire un seuillage de la dérivée du profil d'intensité et de ne retenir que les valeurs au dessus d'une certaine valeur. Ceci se heurte au fait que si la PSF réduite est dissymétrique, ce qui est le cas lorsque $r_0(\lambda) < D$, alors la position du photocentre de la PSF seuillée (avec les pieds coupés) est différente de la position du photocentre de la PSF en entier et cette différence est aléatoire à cause du caractère aléatoire des figures de *speckles* [181].

La figure 3.7 montre en effet qu'il demeure un écart non négligeable entre l'agitation qui affecte les images du bord solaire et les fluctuations de la position du photocentre de la dérivée du profil d'intensité même après seuillage.

Ceci peut par contre être contourné en utilisant une pupille de petit diamètre, de l'ordre de $r_0(\lambda)$. En effet, dans ce cas la PSF a une forme symétrique et n'est affectée au premier ordre que par l'agitation. La figure 3.8 montre la dérivée du bord dans le cas où le diamètre de la pupille D est de l'ordre de $r_0(\lambda)$. Lorsque la PSF est symétrique, la position de son photocentre est indépendante du seuillage qui lui est appliqué. De la même manière, le seuillage de la dérivée d'un bord convolué par une PSF réduite symétrique restituera l'agitation avec l'avantage en plus de pouvoir se limiter à la zone angulaire isoplanétique. Il est à noter que la symétrie de la PSF permet d'envisager aussi des méthodes basées sur un point particulier de la PSF comme peut l'être la position du point d'inflexion par exemple.

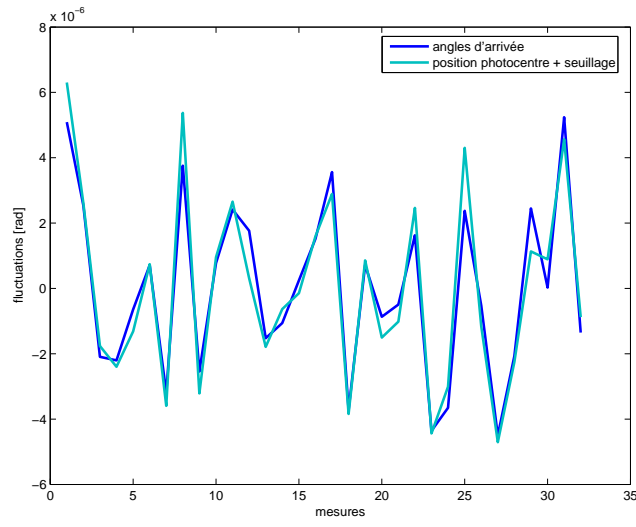


FIG. 3.7 – Une série de mesures indépendantes obtenues par simulation numérique d'un bord solaire en présence de turbulence optique isoplanétique. En bleu foncé est représentée l'agitation induite par la turbulence optique et en bleu clair les mesures sur les images simulées en calculant la position du photocentre de la dérivée du profil d'intensité après avoir seuillé celle-ci. Notons que l'écart dans les mesures n'est pas dû à un bruit mais seulement au caractère aléatoire des figures de *speckles*. On a pris dans ce cas une pupille d'un diamètre $D=25$ cm sans obstruction centrale. On a pris aussi $\lambda=535.7$ nm, $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn.

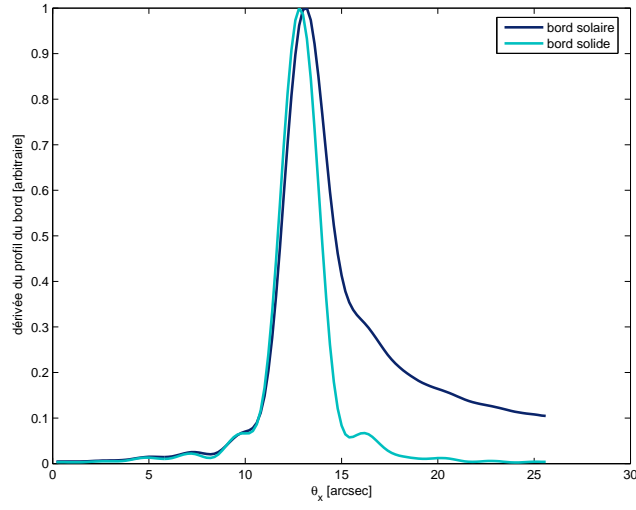


FIG. 3.8 – La dérivée du bord $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ en bleu foncé pour le bord solaire (avec assombrissement) comparée à la dérivée du bord $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ en bleu clair pour un bord de type Heaviside avec la même perturbation. On a pris dans ce cas une petite pupille de diamètre $D=5$ cm sans obstruction centrale. On a pris aussi $\lambda=535.7$ nm, $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn. La symétrie de la PSF réduite permet avec un seuillage adéquat de retrouver l'agitation par les fluctuations de la position de son photocentre.

Il est donc possible avec le diamètre de la pupille qu'il faut et avec un seuillage adéquat de mesurer l'agitation comme variation de la position du photocentre de la dérivée du profil du bord $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$. Ceci demande de faire la dérivée numérique du profil du bord obtenu au foyer du télescope au niveau du détecteur-imageur (CCD). L'estimation du point d'inflexion demande une double dérivation numérique du profil du bord. Comme les images obtenues en pratique sont bruitées (bruit photonique, thermique, bruits de lecture...) la dérivée du profil de bord devient problématique comme on va le voir plus loin.

3.11 Compensation de l'effet de l'assombrissement centre-bord par convolution

On a vu que l'écart par rapport au cas idéal du bord solide que présente l'assombrissement centre-bord introduisait un pied non-nul dans la dérivée du profil de bord solaire $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$, ce qui rend délicat la détermination de la position du photocentre de la PSF réduite.

Il existe un moyen de compenser l'effet de l'assombrissement centre-bord dans les images isoplanétiques du bord solaire et de ramener ces images à celles données par un bord solide dans les mêmes conditions de turbulence optique [50]. Pour cela on utilise les propriétés du produit de convolution décrivant la formation des images isoplanétiques tel qu'exprimé par l'équation 3.16.

Dans le cas idéal d'un bord solide en présence d'une turbulence optique anisoplanétique, la dérivée $\frac{\partial I_x(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ est une distribution impulsionnelle $\delta(\theta_x - \theta_b)$. On peut retrouver cette configuration en convoluant l'image par une fonction $C(\theta_x)$ qui est choisie de telle manière que le résultat soit identique à une convolution de la PSF réduite $PSF^{1D}(\theta_x)$ par une fonction impulsionnelle. Pour cela on va appliquer la convolution sur $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$. Il s'ensuit que la dérivée du résultat est donnée par [30]

$$\frac{\partial}{\partial \theta_x} [C(\theta_x) \otimes I(\theta_x)] = C(\theta_x) \otimes \frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x} \quad (3.23)$$

On peut donc écrire par ailleurs

$$C(\theta_x) \otimes \frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x} = \left[C(\theta_x) \otimes \frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x} \right] \otimes PSF^{1D}(\theta_x) \quad (3.24)$$

avec pour condition

$$C(\theta_x) \otimes \frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x} = \delta(\theta_x - \theta_b) \quad (3.25)$$

En appliquant la transformée de Fourier on peut obtenir grâce au théorème de convolution [30] une estimation de la fonction $C(\theta_x)$ avec

$$C(\theta_x) = TF^{-1} \left\{ \frac{TF\{\delta\{\theta_x - \theta_b\}\}}{TF\{\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}\}} \right\} \quad (3.26)$$

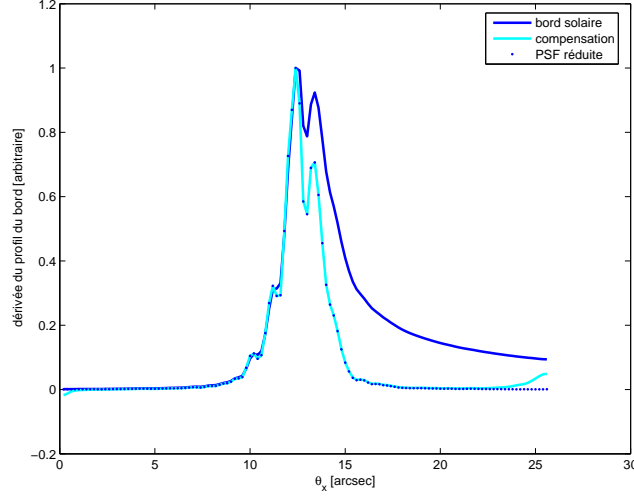


FIG. 3.9 – La dérivée numérique du bord $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ affectée par l'effet de l'assombrissement comparée à la dérivée du bord compensé de l'effet de l'assombrissement en bleu clair avec la PSF réduite en pointillés. On a pris dans ce cas une pupille de diamètre $D=25$ cm sans obstruction centrale. On a pris aussi $\lambda=535.7$ nm, $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn. Connaissant la fonction d'assombrissement centre-bord, on peut ramener l'image du bord solaire en présence de turbulence optique à une image d'un bord solide dans les mêmes conditions de turbulence.

avec θ_b quelconque, et $TF\{\dots\}$ dénotant l'application de la transformée de Fourier.

On notera que puisque les $\delta(\theta_x - \theta_b)$ et $\frac{\partial I_0(\theta_x - \theta_b)}{\partial \theta_x}$ sont réelles alors $C(\theta_x)$ l'est aussi.

On remarquera aussi que l'estimation de la fonction de compensation $C(\theta_x)$ requiert la connaissance a priori de la fonction d'assombrissement $I_0(\theta_x - \theta_b)$.

La Figure 3.9 montre un exemple de PSF réduite retrouvée avec cette méthode.

La compensation de l'effet introduit par la forme de la fonction d'assombrissement centre-bord en ramenant l'image du bord solaire à celle d'un bord solide dans les mêmes conditions de turbulence optique permet, en éliminant le "pied" qui apparaissait vers l'intérieur du disque solaire dans les images du bord solaire, de calculer la position du photocentre de la dérivée du profil d'intensité $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$. On peut alors retrouver la position de la PSF réduite sans se soucier de la taille de la pupille et ainsi mesurer l'agitation affectant les images du bord solaire.

Remarquons aussi que cette manière de ramener les images du bord solaire à celles produites par un bord solide pour retrouver les PSF réduites peut aussi servir à d'autres sujets d'étude tels que l'interférométrie des tavelures (*speckle interferometry*) à une dimension par exemple [91, 57].

Pour revenir aux mesures de l'agitation avec le calcul de la position du photocentre de la dérivée de profil d'intensité dans les images du bord solaire, il faut faire une dérivation numérique sur des images obtenues avec une caméra CCD, et cela pose problème comme on va le voir dans ce qui suit.

3.12 Application aux images longue-pose : le diamètre photométrique du Soleil

Retrospectivement, et connaissant la fonction d'assombrissement centre-bord $I_0(\vec{\theta}_0 - \vec{\theta}_b)$, il est tout à fait possible d'appliquer cette méthode de compensation de l'effet de l'assombrissement aux images longue-pose du bord solaire. Ceci est équivalent à ramener les images du bord solaire affectées par la turbulence optique (et par l'instrument) à l'image d'un bord solide de type fonction de Heaviside dans les mêmes conditions optiques.

Contrairement au cas du bord solaire où $I_0(\vec{\theta}_0 - \vec{\theta}_b)$ a une dérivée asymétrique, la dérivée de la fonction de Heaviside est une distribution de Dirac. La dérivée du profil d'intensité de l'image du bord solaire après compensation de l'effet d'assombrissement est une PSF longue-pose symétrique et centrée sur la position de l'impulsion de Dirac. Les variations de la position de la dérivée du bord dans les images longue-pose après compensation de l'assombrissement sont donc indépendantes de l'instrument et des conditions de turbulence optique et ne sont dues qu'aux variations intrinsèques du diamètre du Soleil si toutes les précautions liées à l'astrométrie différentielle en présence de la réfraction atmosphérique ont été prises, tout en disposant d'une définition unifiée et standard du diamètre photométrique apparent du Soleil.

3.13 Effet du bruit sur les dérivées du profil d'intensité

Une image obtenue avec une caméra CCD est affectée par du bruit. En effet, après la correction du *dark bias* et du *flat field*, qui sont des effets moyens, le signal est corrompu par un bruit aléatoire. Ce dernier a pour source le bruit de photons, le courant d'obscurité, le bruit de lecture. A cela s'ajoutent les effets de numérisation et de pixelisation.

De manière très générique on va considérer dans les simulations numériques un bruit aléatoire se superposant au signal d'origine. On considère que le bruit additif est statistiquement indépendant d'un pixel à un autre, ce qui nous ramène à la situation d'un bruit "blanc". On suppose aussi pour simplifier que la variance de ce bruit est constante dans toute l'image.

Dans une image de N_x pixels avec un pas d'échantillonnage angulaire Δx , la dérivation numérique la plus directe du profil du bord $I(i)$ (avec $i = 1..N_x$) se fait en différenciant de proche en proche avec

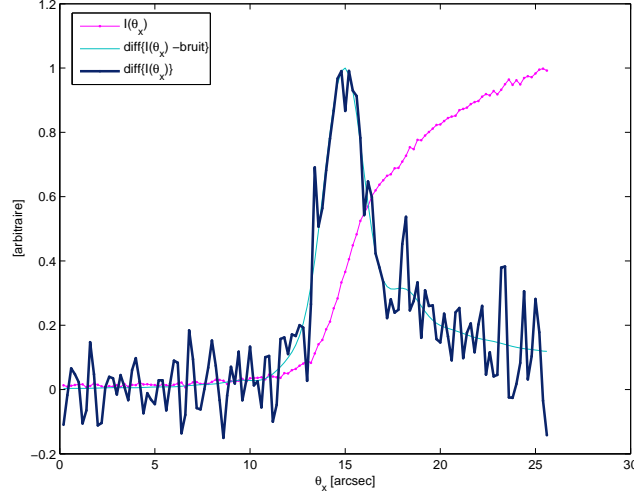


FIG. 3.10 – La dérivée numérique du bord $\frac{\partial I(\theta_x)}{\partial \theta_x}$ en bleu foncé superposée au bord bruité en magenta où le niveau du bruit avoisine 0.05 %. On a pris dans ce cas une petite pupille de diamètre $D=25$ cm sans obstruction centrale. On a pris aussi $\lambda=535.7$ nm, $r_0(535.7\text{nm})=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn. La dérivation numérique amplifie de manière dramatique le rapport bruit/signal.

$$I'(i) = \Delta x^{-1}[I(i+1) - I(i)] \quad (3.27)$$

avec cette fois $i = 1..N_x - 1$.

Etant donné le caractère supposément continu de $I(\theta_x)$ avec un échantillonnage angulaire suffisant, il est aussi possible de faire la différentiation numérique autrement :

$$I'(i) = \begin{cases} \Delta x^{-1}[I(2) - I(1)] & i = 1 \\ \Delta x^{-1}[I(i+1) - I(i-1)]/2 & i = 2..N_x - 1 \\ \Delta x^{-1}[I(N_x) - I(N_x - 1)] & i = N_x \end{cases} \quad (3.28)$$

Dans tous les cas, la dérivation numérique revient à soustraire deux quantités affectées par un bruit aléatoire et le résultat est que la dérivation du profil d'intensité est aussi affectée par le bruit. Il faut noter que le domaine de variation du bruit se fait d'un pixel à un autre alors que la variation du profil du bord s'étend sur plusieurs pixels. Il apparaît donc que la dérivation du profil du bord amplifie le bruit aléatoire de la CCD comme on peut par exemple le voir dans la figure 3.10. En fait, le rapport entre le bruit et le signal dans l'image du profil du bord est amplifié lors de la dérivation numérique.

Il peut être proposé de filtrer le bruit sur les profils de bord avant de faire la différentiation. Dans l'absolu le filtrage d'un bruit blanc (dont le spectre est "continu") ne peut être total puisqu'il toucherait aussi à la forme du bord

qu'on veut mesurer. Un filtrage passe-bas serait équivalent à un lissage où les basses fréquences du bruit déformeraient aussi la forme du profil du bord de manière aléatoire. On peut aussi coupler ce filtrage à un ajustement de la dérivée résultante par une fonction gaussienne après un seuillage adéquat [50].

Cependant, il peut aussi exister des solutions pour mesurer l'agitation directement sur le profil du bord sans avoir besoin de le dériver. Cela permettrait en outre d'éviter de trop dénaturer le signal. Dans ce qui suit on présentera quelques approches alternatives de mesure de l'agitation du profil du bord.

3.14 Mesure de l'agitation du bord solaire par intégration photométrique

Afin d'éviter d'amplifier le bruit des images par dérivation numérique du profil d'intensité dans les images du bord solaire, il est préférable de ne pas faire de dérivation. Les méthodes de traque de mouvement d'image fonctionnent pour la plupart pour des signaux qui s'inscrivent en moyenne sur un support constant et qui ne contient pas de tendance générale d'accroissement monotone linéaire ou non-linéaire comme c'est le cas avec l'assombrissement centre-bord près du bord solaire. Par exemple, la méthode de suivi du mouvement par corrélation (*correlation tracking method*) utilisée pour suivre les structures fines de la photosphère [191, 193, 155] et utilisée dans l'optique adaptative solaire en tip-tilt ou pour des plus hauts modes d'aberration ne peut être utilisée directement sur le bord solaire. En effet, si on considère deux images successives du bord solaire où la turbulence optique induit un déplacement d'un bord par rapport à l'autre vers l'extérieur du disque solaire, alors on voit apparaître dans l'image une portion de la photosphère qui n'était pas présente dans le champ de vision de l'image précédente. Cette portion du bord solaire est importante en intensité et sa contribution à l'image varie de manière non-linéaire. Si on calcule la corrélation mutuelle des profils d'intensité des deux images successives, la contribution de cette partie du bord est très largement supérieure au signal recherché qui rend compte du déplacement de l'image. D'ailleurs, pour les expériences d'optique adaptative solaire il est très déconseillé d'observer trop près du bord solaire à cause justement de l'inefficacité de cette méthode à cet endroit. Cette approche, de même que pour la phase de la transformée de Fourier [57] ou comme on l'a vu la mesure de la position du photocentre ne fonctionne par principe que sur la dérivée du profil d'intensité, mais avec le moindre bruit ça introduit des erreurs de mesure comme on l'a vu. D'autant plus que pour caractériser la turbulence optique à partir des fluctuations d'angle d'arrivée on a besoin de la plus courte pose possible.

Il existe une autre approche pour mesurer l'agitation du bord solaire. Cette méthode a été utilisée tout d'abord pour mesurer les variations de bord solaire [165] avec deux fentes étroites positionnées sur des bords opposés de l'image du Soleil. L'intégrale de l'intensité traversant ces deux fentes (après rotation tout autour du disque solaire) était reliée au diamètre solaire. Cette définition

intégrale du bord solaire fut ensuite utilisée pour mesurer les effets de la turbulence optique sur les images du bord solaire. Il s'agit de placer une seule fente sur l'image d'un bord solaire. Les variations de l'éclairement de la fente, mesuré par un photomultiplicateur, sont au premier ordre liées au mouvement du bord par rapport à la fente, et donc aussi aux fluctuations d'angle d'arrivée [31, 32, 33, 34].

Lorsqu'on observe l'agitation dans les images isoplanétiques, il s'agit d'un mouvement d'ensemble affectant tous les points du profil d'intensité. Les variations de l'intégrale "photométrique" du profil de bord $I(\bar{\theta})$ est effectivement lié au mouvement du bord solaire par rapport au champ de vision de l'image. Dans le cas d'une turbulence optique isoplanétique, ou du moins localement isoplanétique en ce qui nous concerne, le mouvement en bloc de l'image du bord traduit exactement le mouvement individuel de toutes les PSF de l'image, d'autant plus que le mouvement de $I(\bar{\theta})$ traduit le mouvement de toutes les parties de la PSF.

Le problème vient de la partie du bord qui émerge et disparaît dans le champ de l'image du bord. Cette portion du bord solaire n'est pas constante et son apport à l'intégrale photométrique n'est pas linéaire. Le problème peut heureusement être contourné en considérant un seuillage supérieur du profil d'intensité. La figure 3.11 montre comment peut se faire un tel seuillage. Certains critères doivent être respectés pour faire ce seuillage. Tout d'abord, il doit être le même sur toutes les images d'une même séquence d'un bord solaire. Ça suppose aussi que les images ne sont pas individuellement normalisées en intensité de quelque manière que ce soit. Il faut aussi que toutes les images d'une séquence subissent ce seuillage, afin qu'il n'y en ait pas qui en reculant trop vers l'intérieur du disque solaire changent la disposition géométrique de l'intégrale photométrique. Un autre critère à prendre en considération est que pour traduire le plus correctement possible l'information sur le mouvement individuel des PSF et non pas sur le mouvement d'une partie limitée seulement de ces PSF, il faut que le seuillage se fasse de manière à ce que la partie du profil d'intensité qui n'est pas affectée s'étende angulairement sur une distance qui soit supérieure ou égale à l'angle de seeing, qui est l'extension angulaire moyenne et le domaine d'excursion des PSF courte-pose au premier ordre. Avec ces précautions on peut aussi envisager un seuillage inférieur mais puisque c'est une intégration numérique de l'image que l'on effectue, les effets du bruit aléatoire sur les images s'en trouve amoindri, contrairement à ce qu'on obtenait en faisant la dérivation numérique.

On peut voir sur la figure 3.12 que les mesures de position du bord par intégration photométrique numérique avec un seuillage adéquat rendent bien compte des fluctuations d'angle d'arrivée dans le cas d'une turbulence optique isoplanétique.

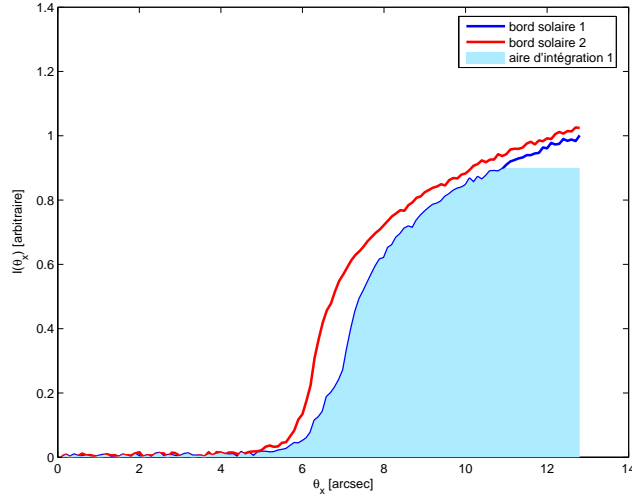


FIG. 3.11 – Une représentation graphique de l'opération de mesure de la position par intégration photométrique numérique et seuillage. Nous avons ici deux profils d'intensité 1 et 2 qui sont affectés par une turbulence optique isoplanétique, d'où le déplacement très apparent de l'un par rapport à l'autre, et aussi un peu de bruit d'imagerie. La variation de l'aire de surface qui apparaît en bleu clair après seuillage pour le profil d'intensité 1 est proportionnelle aux fluctuations d'angle d'arrivée. Après seuillage à une valeur donnée (ici dans cet exemple on a pris 0,9) il suffit pour avoir une position fluctuante en unité angulaire de faire la somme de la fonction profil d'intensité, de multiplier par le pas d'échantillonnage angulaire de l'image $d\theta_x$ et de multiplier par la différence des bornes du seuillage (ici $0.9 - 0$). Pour cet exemple on a pris une pupille d'un diamètre $D=25$ cm sans obstruction centrale. On a pris aussi $\lambda=535.7$ nm, $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn pour la turbulence optique isoplanétique.

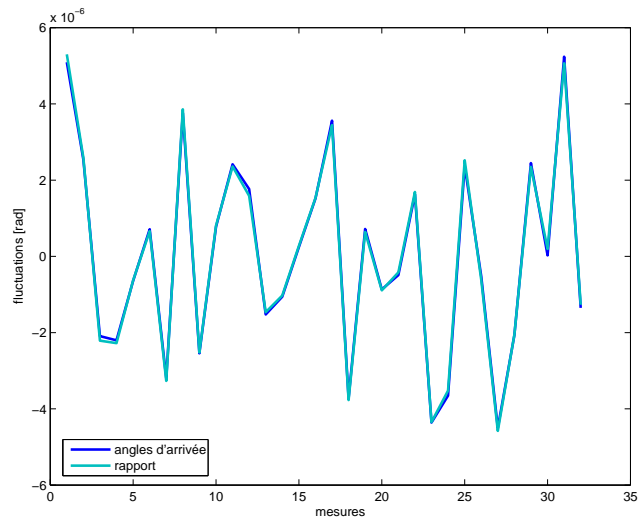


FIG. 3.12 – Une série de mesures indépendantes obtenues par simulation numérique d'un bord solaire en présence de turbulence optique isoplanétique. En bleu foncé l'agitation induite par la turbulence optique et en bleu clair les mesures sur les images simulées en calculant directement le déplacement du front du profil d'intensité en calculant son intégrale photométrique numérique avec un seuillage. On a pris dans ce cas une pupille d'un diamètre $D=25$ cm sans obstruction centrale. On a pris aussi $\lambda=535.7$ nm, $r_0(535.7nm)=4$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn.

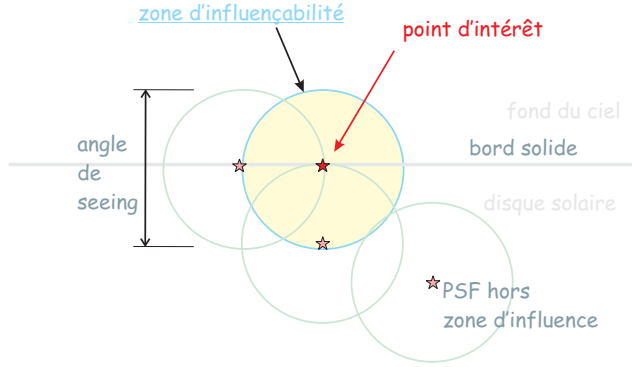


FIG. 3.13 – Schématisation des PSFs dans une image d'un bord solide. Les cercles représentent la limite angulaire des zones d'influence moyenne de chaque PSF. Cette zone d'influence est donnée au premier ordre par l'angle de seeing, ou la largeur de la tache de diffraction en longue exposition, représentant tout l'espace angulaire possible que peut occuper la PSF instantanée dans ses diverses métamorphoses et fluctuations. Pour un point donné quelconque de l'image du bord, ici représenté par une étoile rouge, les seules PSFs qui auront vraiment une contribution seront celles qui sont issues des point-sources situés à l'intérieur de sa zone d'influence (qui se trouve par la même occasion être sa zone d'influencabilité) ou à une distance angulaire qui est la moitié de l'angle de seeing.

3.15 Mesures de l'agitation dans les cas anisoplanétiques

Dans le cas le plus général d'une turbulence optique anisoplanétique, l'image $I(\vec{\theta})$ du bord solaire s'écrit

$$I(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}_0 I_0(\vec{\theta}_0 - \vec{\theta}_b) PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \quad (3.29)$$

où $\vec{\theta}_b$ dénote la position du bord solaire selon une définition ou une autre. $PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)$ est la réponse impulsionnelle normalisée et centrée autour de la position angulaire $\vec{\theta}_0$ à une position angulaire $\vec{\theta}$ par rapport au référentiel angulaire défini pour le champ angulaire de l'instrument. Cette réponse angulaire dépend dans le cas le plus général de l'angle d'incidence initial $\vec{\theta}_0$ en dépit des fluctuations d'angle d'arrivée.

A chaque point-source dans $I_0(\vec{\theta}_0 - \vec{\theta}_b)$ est associé dans l'image $I(\vec{\theta})$ une distribution angulaire d'intensité $PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)$. D'un autre côté, chaque point de l'image est affecté par la contribution des différentes PSF de son entourage immédiat.

Lorsqu'on a considéré le cas isoplanétique, toutes les PSF de l'entourage d'un point d'intérêt donné étaient les mêmes. En dépit de leur structure an-

gulaire propre, elles subissaient toutes la même agitation et imprimaient cette agitation au mouvement d'ensemble de l'image. Il était possible de remonter au mouvement d'ensemble de ces PSF.

Dans le cas anisoplanétique les choses sont différentes. Nous avons un champ angulaire de PSF différentes. Ces PSF ont des formes angulaires différentes et des positions de photocentre différentes. La situation est d'autant plus confuse que si les PSF se présentent sous forme multi-*speckles* alors la contribution d'une PSF donnée à un point de l'image est quasi-aléatoire car il peut s'agir de n'importe quelle partie de la distribution de *speckles* à un instant donné.

Chaque PSF donnée par $PSF_{\vec{\theta}_0}^{NC}(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)$ a une "zone d'influence" moyenne qui au premier ordre est donnée par l'étendue angulaire de la PSF longue-pose. La largeur maximale de cette zone d'influence est donnée par l'angle de *seeing* (Equation 1.51). Chaque point d'intérêt dans l'image ne peut donc être déterminé que par l'influence des PSF centrées sur des points du voisinage immédiat d'une distance inférieure à la moitié de cet angle de *seeing* comme on peut le voir dans la figure 3.13.

Considérons tout d'abord comme zones d'intérêt les points se situant sur le bord d'un objet solide à $\theta_x = \theta_b$. On prend θ_x composante de $\vec{\theta}$ dans le sens perpendiculaire au bord et θ_y parallèle au bord. On peut dans cette situation distinguer deux cas extrêmes.

Dans un premier cas on peut considérer un isoplanétisme local, où l'on a *angle anisoplanétique* $> 1/2$ *angle de seeing*.

Dans ce cas la région de l'extrême bord, n'étant influencée que par les PSF des points se situant à une distance inférieure à la moitié de l'angle de *seeing*, elle n'est affectée que par des PSF qui ont la même distribution angulaire et la même agitation. La région du bord est localement isoplanétique et ne subit pas l'influence provenant de PSF lointaines dans l'image. Les méthodes développées pour le cas isoplanétique sont applicables dans ce cas.

Dans un second cas, on peut définir une situation d'anisoplanétisme local, où cette fois *angle anisoplanétique* $< 1/2$ *angle de seeing*.

Dans ce cas, il y a contamination par les PSF du voisinage immédiat qui ont des figures *speckles* différentes et qui se trouvent néanmoins dans la zone d'influencabilité des points d'intérêt dans l'extrême bord. Les mesures d'agitation qu'on ferait dans cette zone ne correspondent pas aux fluctuations d'angle d'arrivée mais elles sont contaminées par des fluctuations consécutives à la formation des figures de *speckles*.

L'effet d'un anisoplanétisme local sévère sur un bord solaire (assombrissement centre-bord continu) peut s'avérer encore plus critique même avec les mêmes conditions de turbulence optique. Ceci est dû au fait que pour un point-source de ce que l'on pourrait définir comme étant le bord extrême, la contamination par les PSF issues du voisinage immédiat est d'autant plus amplifiée que la pente de la fonction d'assombrissement est importante vers l'intérieur du disque solaire.

Dans le monde réel on peut aussi être dans une situation intermédiaire entre l'isoplanétisme local et l'anisoplanétisme local. Ceci dépend comme on l'a vu du

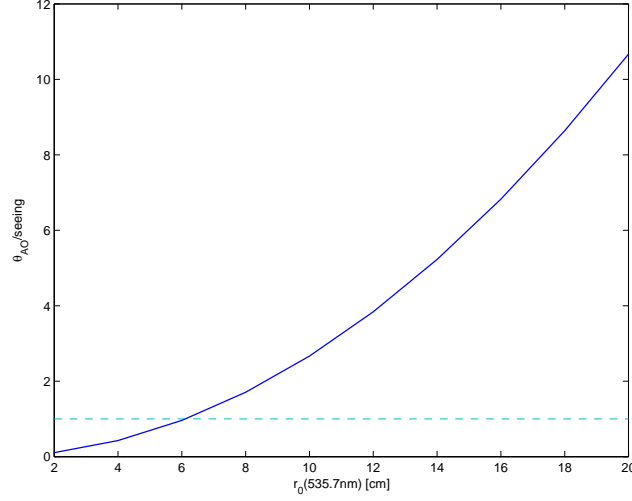


FIG. 3.14 – Un tracé du rapport angle isoplanétique sur l'angle de *seeing* ($\theta_{AO}/seeing$) pour la longueur d'onde $\lambda=535.7$ nm en fonction de $r_0(535.7nm)$ pour avoir une indication qualitative sur l'occurrence des cas d'isoplanétisme et anisoplanétisme locaux. On a considéré en effet un profil de $C_n^2(h)$ suivant la loi de Hufnagel pour la turbulence de jour comme étant un profil représentatif moyen. Le cas considéré est le modèle de turbulence optique dit de Kolmogorov, soit une échelle externe infinie et en négligeant les effets de la pupille. Le tracé en pointillé dénote le cas où l'angle d'isoplanétisme est égal à l'angle de *seeing*. Comme on a vu, On a une situation d'isoplanétisme local lorsque l'angle isoplanétique est supérieur à l'angle de *seeing*. Il apparait dans cette figure que dans la majorité des cas, du moins pour un profil de Hufnagel, on se trouve dans un cas d'isoplanétisme local. Le cas limite où on commence à entrer en anisoplanétisme local se rencontre pour un très mauvais *seeing* ($r_0(535.7nm)$ autour de 5 cm). Si on considère que c'est un cas idéalisé où l'on a omit les effets de l'échelle externe et de la pupille, on peut raisonnablement faire reculer cette limite, ce qui nous fait considérer que dans la plupart des cas on a une turbulence optique localement isoplanétique, et que si elle est localement anisoplanétique ce sera avec un faible anisoplanétisme local.

rapport entre l'angle isoplanétique et l'angle de *seeing*. La figure 3.14 illustre ce rapport en fonction de $r_0(535.7 \text{ nm})$ dans le cas idéalisé d'une turbulence optique obéissant au modèle dit de Kolmogorov.

Dans les cas de bon *seeing*, on se trouve dans une situation d'isoplanétisme local où l'on peut appliquer localement l'approximation isoplanétique et les méthodes associées pour l'extraction des fluctuations d'angle d'arrivée.

Dans les cas de très mauvais *seeing* par contre, on se trouve dans une situation d'anisoplanétisme local.

Une situation d'anisoplanétisme local, et donc forcément de mauvais *seeing*, peut être diagnostiquée à partir du constat d'asymétrie affectant la moyenne d'ensemble effectuée sur la dérivée du profil de bord après que celui-ci ait été ramené à une image d'un bord solide dans les mêmes conditions de turbulence optique comme on a vu. Si tel est le cas, il peut se conclure que l'agitation du bord que l'on mesure par quelque méthode que ce soit ne correspond pas forcément aux fluctuations d'angle d'arrivée telles que communément définies.

3.16 Conclusion

Dans ce chapitre on a tout d'abord examiné les effets de la turbulence optique sur les images du bord solaire. Etant donné que l'agitation du bord y est identifiée aux fluctuations d'angle d'arrivée, on a cherché le moyen de mesurer ces fluctuations. On a utilisé la simulation numérique pour comparer les fluctuations d'angle d'arrivée vraies (celles qui correspondent à la turbulence optique injectée) aux mesures qu'on fait sur les images avec différentes approches et différentes méthodes.

Les fluctuations d'angle d'arrivée nous permettent de remonter à toutes les propriétés statistiques et spectrales de la turbulence optique, qu'elle soit nocturne ou solaire. Il est donc important de bien modéliser cette observable. On montre un aspect de cet affinement de la modélisation des fluctuations d'angle d'arrivée à travers l'étude des effets de diffraction dues à la hauteur des couches turbulentes et à l'effet polychromatique dans le cas d'un rayonnement incohérent. Cette étude théorique pourra être complétée par l'introduction de variations spatiales de scintillation sur la pupille d'entrée et figurer comme une étude future pour une meilleure modélisation des fluctuations d'angle d'arrivée.

On a d'abord vu que l'approche naïve qui consistait à considérer les variations de la position du point d'inflexion comme étant égales aux fluctuations d'angle d'arrivée n'était pas fondée et qu'elle était invalide dès que le diamètre du télescope était plus grand que $r_0(\lambda)$. On a montré ensuite que dans le cas d'un bord solide de type fonction de Heaviside, les fluctuations d'angle d'arrivée étaient retrouvées par les variations de la position du photocentre de la dérivée du profil d'intensité dans les images du bord solaire. Cependant, cette méthode ne fonctionne pas sur les images solaires à cause de l'effet d'assombrissement centre-bord caractérisant les images de la photosphère solaire. On a donc contourné cette difficulté en ramenant les images solaires à des images d'un bord solide virtuel qui sont affectées par la même turbulence optique. Ce traitement

permet de mesurer les fluctuations d'angle d'arrivée à partir des positions du photocentre de la dérivée du profil d'intensité.

Une retombée fort intéressante de cette méthode est que, appliquée aux images longue-pose du bord solaire, elle peut définir une position du bord solaire, et donc un diamètre photométrique solaire, qui soit indépendante des conditions de turbulence optique ou de l'instrument. Ça peut enfin amener à une définition unifiée et standard du diamètre photométrique solaire qui soit au premier ordre indépendant des conditions d'observation.

L'utilisation pour les images courte-pose de la méthode du photocentre de la dérivée repose sur une dérivée numérique du profil d'intensité (compensé de l'assombrissement) qui est lui affecté par un bruit aléatoire lié à l'imagerie par caméra CCD. Comme la dérivation amplifie de manière dramatique le bruit, on a cherché à mesurer les fluctuations d'angle d'arrivée à partir des images courte-pose du bord solaire sans pour autant avoir à faire de dérivations numériques. Parmi tous les scénarios auxquels on a pensé, la méthode de l'intégration photométrique numérique des profils d'intensité avec un seuillage adéquat semble être la plus efficace et aussi la plus stable par rapport aux effets du bruit dans les images. Cette méthode prouve son efficacité dans le cas d'une turbulence optique localement isoplanétique.

Dans le cas d'une turbulence optique localement anisoplanétique, la méthode perd de sa pertinence car on montre que l'agitation du bord solaire n'est pas du seulement à des fluctuations d'angle d'arrivée et il devient vite très difficile de la modéliser de manière triviale. Il est toutefois possible de diagnostiquer cet état de fait et de conclure à la non-correspondance entre les mesures d'agitation du bord et les fluctuations d'angle d'arrivée dans ce cas bien précis.

On a donc abouti à une meilleure compréhension de la manière avec laquelle on peut mesurer les fluctuations d'angle d'arrivée à partir des images courte-pose du bord solaire. Cette étape nécessaire permettra de caractériser plus efficacement la turbulence optique du jour en se basant sur des mesures fiables de fluctuations d'angle d'arrivée.

Chapitre 4

Observation plan-pupille de la turbulence optique diurne

4.1 L’observation plan-pupille de la turbulence optique

L’observation plan-image de la turbulence optique est limitée à la résolution des pupilles ou des sous-pupilles au travers desquelles elle est effectuée. Ceci prévient par exemple d’étudier de manière précise les effets de la turbulence optique à des échelles telles que l’échelle interne à cause des filtrages de la pupille. On a vu par exemple comment les fluctuations d’angle d’arrivée extraites à partir des images du bord solaires étaient en fait des fluctuations moyennées sur la pupille du télescope observant ces bords. Ayant la modélisation adéquate cela ne pose pas de problème majeur. Il est tout de même intéressant de mesurer les perturbations de la turbulence optique de manière plus fine, notamment pour l’optique adaptative multi-conjuguée aux basses couches. Parmi les méthodes d’observation de la turbulence optique à haute résolution spatiale figurent les méthode d’observation plan-pupille. Il s’agit d’observer les variations d’intensité dans l’image conjuguée à la pupille d’entrée. Ces variations d’intensité sont liées aux perturbations de la turbulence optique à l’entrée du télescope. Si on observe l’image plan-pupille avec comme source une étoile sans aucune obstruction du plan focal du télescope, on obtient une image des fluctuations d’intensité (la scintillation) à la pupille d’entrée [125, 8]. Avec des diaphragmes-filtres disposés dans le plan focal du télescope on obtient (dans le cadre de l’approximation du champ proche) des variations d’intensité qui sont liées aux fluctuations de phase dans le rayonnement au niveau de la pupille d’entrée [198, 138, 101, 39, 87, 153, 70]. Cette approche est inspirée du test de Foucault utilisé pour rendre compte des aberrations de phase affectant les appareils optiques. Aussi, on envisage l’utilisation de ces techniques (toujours dans le cadre théorique de l’approximation du champ proche) pour mesurer les déformations des fronts d’onde pour l’optique

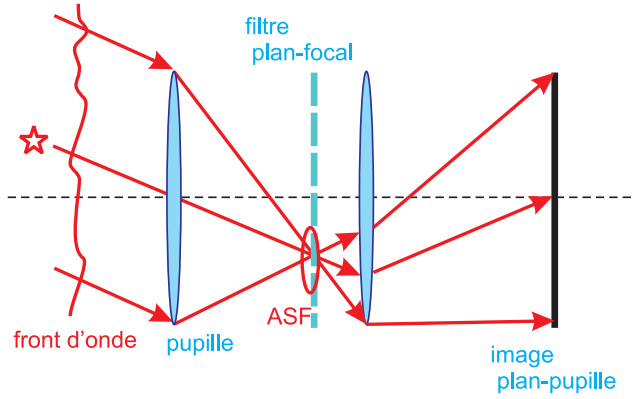


FIG. 4.1 – Schéma simplifié de l'observation plan-pupille à travers un filtrage spatial au niveau du plan focal.

adaptative [140]. L'observation de la turbulence optique solaire bénéficie aussi de l'attention des techniques d'observation plan-pupille. Le test de Foucault permet en effet non seulement d'affiner la focalisation des images solaire au foyer des télescopes mais aussi de suivre l'importance de la turbulence optique affectant les mesures [12]. Une version modifiée du test de Foucault incluant la disposition d'une fente dans le plan focal du télescope solaire produit une image plan-pupille dont les variations d'intensité correspondent aux fluctuations d'angle d'arrivée au niveau de la pupille d'entrée si on considère l'approximation du champ proche [22, 19]. Dans le cadre de cette approximation il est en effet possible de caractériser statistiquement la turbulence optique au sol [20, 21, 126]. La méthode peut être aussi étendue à un filtrage adapté au niveau du plan focal du télescope [192].

Cette approche est basée sur un certain nombre d'approximations que l'on examine point par point dans ce chapitre. On se place dans le cas de l'observation d'une étoile d'abord puis on passe au cas de l'observation d'un objet étendu qui est le Soleil en ce qui nous concerne en premier lieu. On montre que l'on peut mesurer les perturbations de la turbulence optique à une résolution spatiale appréciable qui permet non seulement des études de statistiques temporelles et de *profiling* vertical de la turbulence optique, même si l'observable n'est pas exactement celle à laquelle on s'attend a priori.

4.2 L'observation plan-pupille de la turbulence optique dans le cas d'une source ponctuelle

On considère le cas d'un point-source qui éclaire la pupille d'entrée d'un télescope. Si la distribution spatiale sur la surface de la pupille de l'amplitude complexe est donnée par $A_{\vec{\theta}_0} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r})$ alors la fonction de dispersion angulaire de

l'amplitude complexe $ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta})$ résultant de la diffraction à travers la pupille est donnée par

$$ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) \propto \int d\vec{r} A_{\vec{\theta}_0} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r}) G(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \vec{r} \right\} \quad (4.1)$$

$\vec{\theta}_0$ est l'angle d'incidence du rayonnement issu du point-source par rapport à l'axe optique du télescope. $G(\vec{r})$ est la fonction pupille. La distribution spatiale de l'amplitude complexe sur la pupille pour le point-source angulairement situé en $\vec{\theta}_0$ s'écrit avec une amplitude moyenne $A_{\vec{\theta}_0}$ qui est liée à l'intensité de la source, et d'une amplitude complexe normalisée $\Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r})$ qui dans cette écriture ne contient pas l'information sur $\vec{\theta}_0$ dans sa phase, celle-ci étant exprimée explicitement par le terme $\exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\theta}_0 \vec{r} \right\}$ dans l'intégrale de diffraction.

Afin de donner une image un peu intuitive de cette équation, on peut dire que $\Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{r})$ est dépouillée de $\vec{\theta}_0$ dans sa phase, et que celle-ci se retrouve dans l'exponentielle $\exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\theta}_0 \vec{r} \right\}$. La diffraction produit néanmoins une réponse impulsienne centrée autour de la direction $\vec{\theta}_0$. L'ASF centrée autour de $\vec{\theta}_0$ est $ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta})$ dans le référentiel angulaire lié à l'axe optique du télescope. Dans cette écriture l'amplitude complexe n'est atteinte que par les aberrations induites par la turbulence atmosphérique et l'angle d'incidence moyen n'est pas considéré comme une aberration mesurable.

Dans le plan focal du télescope on peut réaliser un filtrage. Celui-ci peut être un filtrage en amplitude par la disposition d'un masque comme dans les cas spécifiques qu'on va voir plus tard, ou un filtre complexe. Bien que ce filtre soit spatialement placé dans le plan focal du télescope, on exprimera la fonction de filtrage en fonction des coordonnées angulaires. La fonction de filtrage plan-focal $G_{fp}(\vec{\theta})$ est fixe dans l'axe optique du télescope et l'ASF $ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta})$ se situe en fonction de la position angulaire $\vec{\theta}_0$. Le filtrage induit dépend nécessairement de la disposition angulaire relative de l'ASF et de la fonction de filtrage plan-focal. L'image de la pupille obtenue à travers ce filtre est donnée par une distribution spatiale de l'amplitude complexe $\aleph_{\vec{\theta}_0}(\vec{R})$ qui est définie dans un référentiel spatial (\vec{R}) qui peut être différent de (\vec{r}) selon le grossissement utilisé pour réimager la pupille. Dans le plan-pupille on a donc

$$\aleph_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) = \int d\vec{\theta} G_{fp}(\vec{\theta}) ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \vec{R} \right\} \quad (4.2)$$

L'intensité de l'image, celle qui est enregistrée par les détecteurs dans le plan pupille, est donnée par

$$I_{pp, \vec{\theta}_0}(\vec{R}) = \left| \aleph_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) \right|^2 \quad (4.3)$$

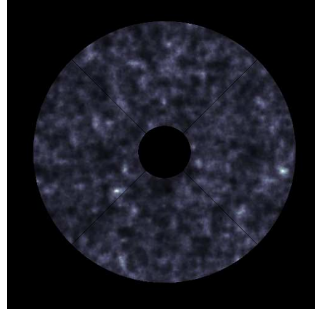


FIG. 4.2 – Image d’ombres volantes stellaires, figure de scintillation dans le cas d’une seule étoile obtenue par simulation numérique pour une longueur d’onde $\lambda=505$ nm dans le cas d’une turbulence atmosphérique à trois couches (à des altitudes $h=500$, 1500 et 3000 m). Le télescope est circulaire avec un diamètre $D=50$ cm. Dans ce cas on a pris $r_0(505nm)=8$ cm et $L_0 \approx 10$ m dans le cadre d’une turbulence obéissant au modèle de von Kàrmàn.

4.2.1 Les ombres volantes de scintillation

Les ombres volantes sont des distributions spatiales des fluctuations d’intensité du rayonnement affecté par la turbulence optique. Elles sont observables à l’œil nu lors des éclipses solaires. Elle sont aussi observables dans le plan pupille d’un télescope en observant une étoile ou un objet faiblement étendu [125]. Dans ce cas il n’y a pas de filtrage plan-focal

$$G_{fp}(\vec{\theta}) = 1 \quad (4.4)$$

L’amplitude complexe dans le plan pupille s’écrit

$$\aleph_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) = \int d\vec{\theta} ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \vec{R} \right\} \quad (4.5)$$

On effectue la transformation inverse, à un facteur d’échelle près, de ce qui a donné l’ASF. Le résultat est

$$\aleph_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) = A_{\vec{\theta}_0} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) G(\vec{R}) \quad (4.6)$$

L’intensité de l’image de la pupille est ainsi l’intensité du rayonnement au niveau de la pupille. Les mesures de variation d’intensité dans le plan-pupille correspondent directement à la scintillation sur la pupille.

4.2.2 Le test de Foucault

Le test de Foucault est une technique optique de mise en évidence des aberrations optiques affectant les instruments optiques, ainsi que celles affectant les fronts d’onde lumineux eux-mêmes. Il s’agit d’observer les fluctuations de phase

affectant le rayonnement arrivant au plan focal de l'instrument sous la forme de variations d'intensité dans l'image reconstruite du plan pupille après l'introduction d'un masque plan (*a knife edge*) qui cache une partie de l'ASF dans le plan focal.

Le filtre plan-focal peut être formalisé dans le cas du test de Foucault sous la forme d'une fonction de Heaviside (*knife edge*). On considère dans le cas général un couteau de Foucault qui n'est pas centré dans le référentiel lié à l'axe optique du télescope mais qui est décalé d'un angle θ_H donné. On peut alors représenter la fonction $G_{fp}(\theta_x, \theta_y)$ sous la forme

$$G_{fp}(\vec{\theta}) = G_H(\theta_x, \theta_y) = \begin{cases} 0 & \theta_x < \theta_H \\ 1/2 & \theta_x = \theta_H \\ 1 & \theta_x > \theta_H \end{cases} \quad (4.7)$$

Bien que ce soit très souvent considéré comme une technique qualitative en pratique, il existe néanmoins une relation entre les fluctuations de phase à l'entrée de la pupille et les fluctuations d'intensité dans l'image plan-pupille. La difficulté de cette technique vient du fait qu'il est difficile de contrôler avec précision la position du bord du couteau de Foucault par rapport à la position de l'ASF. Le test de Foucault est le plus souvent décrit avec l'approximation de l'optique géométrique. Il est cependant possible de le faire avec l'optique diffractive [198, 39, 153].

L'équation 4.2 est une transformée de Fourier (si on considère comme fréquence angulaire le vecteur \vec{R}/λ). Le théorème de convolution permet de la réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) &= \int d\vec{\theta} G_{fp}(\vec{\theta}) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \vec{R} \right\} \\ &\otimes \int d\vec{\theta} ASF_{\vec{\theta}_0}(\vec{\theta}) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \vec{R} \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Le deuxième facteur de ce produit de convolution est comme on l'a vu pour le cas sans filtrage plan-focal l'image dans le référentiel \vec{R} de l'amplitude complexe au niveau de la pupille d'entrée. On écrira alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) &= \int d\vec{\theta} G_{fp}(\vec{\theta}) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \vec{R} \right\} \\ &\otimes A_{\vec{\theta}_0} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) G(\vec{R}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

En s'aidant des propriétés de la transformée de Fourier [30], on trouve pour le premier facteur du produit de convolution dans le cas d'un filtrage de Foucault [198] l'expression

$$\int d\vec{\theta} G_H(\theta_x, \theta_y) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta} - \vec{\theta}_0] \vec{R} \right\} = \quad (4.10)$$

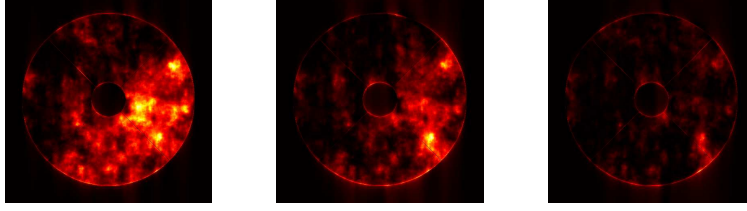


FIG. 4.3 – Images plan-pupille obtenues avec un masque de Foucault pour trois positions angulaires différentes de l'étoile par rapport à l'axe optique du télescope. Le masque de Foucault est parfaitement centré sur l'axe optique. Les positions de l'étoile varient de ≈ 0.17 arcsec à chaque fois pour une turbulence optique isoplanétique qui est la même dans chaque cas.

$$\exp \left\{ \frac{-2\pi i}{\lambda} [\vec{\theta}_0 \vec{R} - \theta_H R_x] \right\} \left[\frac{\lambda^2}{2} \delta\{\vec{R}\} - \frac{\lambda^2 i}{2\pi R_x} \delta\{R_y\} \right]$$

A partir de là, l'amplitude complexe dans l'image plan-pupille peut s'écrire

$$\begin{aligned} \aleph_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) &= \frac{\lambda^2}{2} A_{\vec{\theta}_0} \Psi_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) G(\vec{R}) \\ &- i \frac{\lambda^2}{2\pi} A_{\vec{\theta}_0} \int dR'_x \Psi_{\vec{\theta}_0}(R'_x, R_y) G(R'_x, R_y) \frac{1}{[R_x - R'_x]} \\ &\exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} [R_x - R'_x] [\theta_H - \theta_{0,x}] \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Une étoile, ou un point-source quelconque, donnera une réponse différente en fonction de la position qu'elle occupe dans le ciel (et donc la position de son ASF dans le plan focal) par rapport à la position du couteau de Foucault dans le plan focal. Ceci peut être observé par exemple dans la figure 4.3 obtenue par simulation numérique.

4.3 L'observation plan-pupille de la turbulence optique dans le cas d'une source étendue

Dans le cas où l'on observe un objet étendu tel que le Soleil par exemple, les différents points-source de l'objet sont optiquement incohérents. Il s'ensuit que l'intensité de l'image plan-pupille $I_{pp}(\vec{R})$ est la somme en intensité de toutes les contributions à l'image se formant dans le plan focal et transmises par le filtre plan-focal selon les angles d'incidence $\vec{\theta}_0$. On écrira

$$I_{pp}(\vec{R}) = \int d\vec{\theta}_0 \left| \aleph_{\vec{\theta}_0}(\vec{R}) \right|^2 \quad (4.12)$$

Si on considère le cas isoplanétique, l'image plan-pupille est issue de toutes les contributions des diverses positions relatives des ASF liées aux positions angulaires $\vec{\theta}_0$ dans le ciel par rapport au filtre dans le plan focal du télescope.

4.3.1 Le test de Foucault dans le cas d'un objet étendu

Un objet étendu est une distribution angulaire continue de points-source. Outre l'avantage par rapport au cas d'une étoile de ne pas être limité par la qualité du pointage, l'observation plan-pupille de la turbulence optique dans le cas d'un éclairage par un objet étendu peut être autrement intéressante. Pour comprendre ce point on peut considérer un test de Foucault classique effectué pour un objet étendu avec un éclairage isotrope en présence de turbulence optique. Chaque point-source de l'objet étendu va induire une ASF localisée différemment par rapport au couteau de Foucault. Si l'ASF n'est pas masquée par le couteau alors sa contribution à l'image plan-pupille est la distribution spatiale de l'intensité du rayonnement correspondant au niveau de la pupille d'entrée. Si maintenant on ignore les effets de la scintillation, ce qui revient à prendre le cas où la turbulence atmosphérique est localisée très près du télescope, alors l'éclairage correspondant à une ASF non-affectée par le masque de Foucault est un éclairage homogène dans l'image de la pupille d'entrée. L'ASF qui est à l'autre extrême totalement masquée par le couteau de Foucault ne produit évidemment rien du tout.

On peut se faire une idée intuitive de ce qui se passe grâce à l'approximation de l'optique géométrique.

Le filtrage au niveau de l'ASF par le masque de Foucault ne se produit que si l'ASF se trouve à une distance angulaire inférieure à son extension angulaire moyenne, soit au premier ordre à l'angle de *seeing* θ_{seeing} , par rapport au bord du masque. En d'autres termes, si l'angle d'arrivée instantané dans le sens perpendiculaire au bord du couteau de Foucault pour une ASF donnée est exprimé par $\theta'_{0,x}$, alors il faut que

$$|\theta'_{0,x} - \theta_H| < \theta_{seeing} \quad (4.13)$$

On peut considérer le centre des ASFs affectées par le masque de Foucault. Certains centres sont masqués et d'autres sont transmis. La proportion des centres d'ASF transmises par rapport au total des centres d'ASF est de 50 %. Si on considère par contre une zone cohérente quelconque du front d'onde avec une pente locale (perpendiculairement au bord du couteau de Foucault) différente de $\theta'_{0,x}$, alors cette zone du front d'onde sera responsable d'une zone particulière de l'ASF qui est plus ou moins décalée par rapport au centre de l'ASF. Si on considère que la turbulence optique est localement isoplanétique dans le sens où l'angle isoplanétique est inférieur à $2\theta_{seeing}$, alors la proportion du nombre de cas où la zone de l'ASF considérée est transmise par rapport au nombre total des cas considérés (ceux où l'ASF est partiellement masquée par le couteau de Foucault) est différent de 50 %.

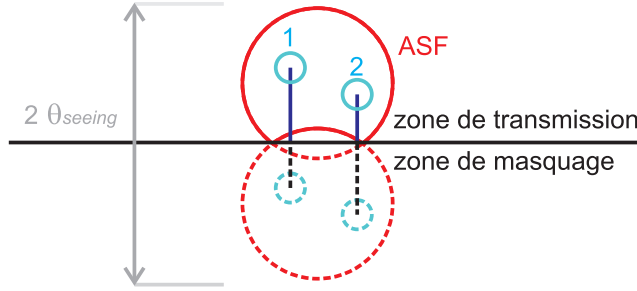


FIG. 4.4 – Schéma montrant les positionnements extrêmes de deux ASFs par rapport au masque de Foucault dans le plan focal du télescope et correspondant à deux positions angulaires de points-source. Les cercles rouges 1 et 2 sont deux zones (de la taille approximative de la tache de diffraction du télescope) qui sont dues à deux zones cohérentes différentes du front d'onde à l'entrée du télescope. En fonction de leurs positions par rapport à l'ASF, en supposant ici une turbulence optique localement isoplanétique, les zones de cohérence dans l'image plan-pupille seront plus ou moins éclairée selon la position des zones correspondantes dans l'ASF. Ici dans cet exemple la zone donnant le *speckle* 1 sera plus éclairée que la zone du front d'onde à l'origine du *speckle* 2.

L'éclairement dans l'image de la pupille est lié à la proportion du nombre de cas où la zone correspondante dans l'ASF est transmise par rapport au nombre total de cas où les ASFs sont partiellement masquées par le couteau de Foucault. Comme cette proportion est liée à la pente locale du front d'onde dans la zone considérée par rapport à la pente globale du front d'onde, alors l'éclairement dans l'image reconstruite de la pupille d'entrée est proportionnel à la fluctuation d'angle d'arrivée dans la zone correspondante au niveau de la pupille d'entrée.

L'image en intensité du plan-pupille avec un masque de Foucault dans le plan focal, dans le cas d'un éclairement isotrope et une turbulence optique isoplanétique où l'on ignore la scintillation, est proportionnelle à la distribution spatiale correspondante des fluctuations d'angle d'arrivée au niveau de la pupille d'entrée.

Outre l'identification qualitative au moyen des considérations de l'optique géométrique tel qu'on vient de le présenter, il est aussi possible de s'assurer de la proportionnalité des variations d'intensité dans l'image de la pupille et des fluctuations d'angle d'arrivée au niveau de la pupille par simulation numérique [15, 16].

Il peut être montré que l'on obtient également les fluctuations d'angle d'arrivée si l'intensité du rayonnement varie de manière linéaire dans le sens perpendiculaire au bord du masque de Foucault.

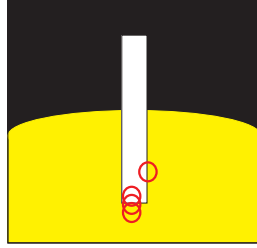


FIG. 4.5 – Schéma d'une fente plan-focal où se forme l'image du bord solaire pointé par le télescope avec en petits cercles rouges une représentation d'ASFs partiellement masqués.

4.3.2 Cas de l'observation solaire

Accéder aux fluctuations d'angle d'arrivée via le test de Foucault appliqué dans le cas de l'observation d'un objet étendu ouvre la perspective de mesurer ces fluctuations dans le plan pupille en observant le Soleil.

A cause de l'anisoplanétisme par contre, il n'est pas possible d'utiliser un masque de Foucault dans le plan focal du télescope mais pour en réduire l'effet on utilise une fente rectangulaire tel que montré dans la figure 4.5. le bord inférieur de la fente pour faire l'effet du couteau de Foucault et les bords latéraux pour se contenter d'une portion restreinte du bord solaire. Cette approche expérimentale permet dans le cas d'une turbulence atmosphérique localisée près de l'instrument de mesurer les fluctuations d'angle d'arrivée [19, 20, 126] et ainsi de caractériser la turbulence optique près du sol [21].

Cette approche expérimentale est moins triviale que le test de Foucault appliqué dans le cadre idéal d'une source avec un éclairage isotrope (du point de vue de l'observateur) en présence d'une turbulence optique isoplanétique. Il faut en effet prendre en compte quelques effets limitatifs dans l'optimisation de cette méthode d'observation.

4.3.3 Effet de l'assombrissement centre-bord

On a vu que le domaine angulaire sur lequel s'effectue le filtrage des ASFs par le bord du masque de Foucault s'étend sur deux fois l'angle du *seeing*, soit $2\theta_{seeing}$ en moyenne. Pour que les fluctuations d'angle d'arrivée à l'entrée de la pupille se transforment en variations d'intensité dans l'image plan-pupille il faut que l'intensité des points-source le long du chemin perpendiculaire au bord du masque varie de façon linéaire sur au moins $2\theta_{seeing}$ de distance angulaire. On peut en effet montrer par simulation numérique qu'une non-linéarité de cette variation d'intensité, due à l'assombrissement centre-bord du Soleil, induit une distorsion de la relation de linéarité entre les fluctuations d'angle d'arrivée et

les variations d'intensité dans l'image plan-pupille [15]. Il se trouve cependant que l'on peut négliger suffisamment cet effet dès que l'on s'éloigne un peu de l'extrême bord du disque solaire. En effet les variations d'intensité dues à l'assombrissement peuvent être considérées comme presque linéaires sur les courtes distances angulaires que sont $2\theta_{seeing}$ et les effets des non-linéarités locales de l'assombrissement centre-bord sont négligeables.

4.3.4 Effet de l'anisoplanétisme

L'obtention des fluctuations d'angle d'arrivée dans l'image plan-pupille sous forme de variations d'intensité se réalise dans le cas isoplanétique où la couche turbulente est localisée très près du sol. Dans le cas où la turbulence se trouve en hauteur, on obtient aussi les fluctuations d'angle d'arrivée dans le cas d'un isoplanétisme local de la turbulence optique dans lequel l'angle d'isoplanétisme est supérieur à $2\theta_{seeing}$. La largeur de la fente peut cependant mélanger les effets issus de directions différentes dont les rayonnements ont subi des aberrations optiques différentes.

Si la turbulence optique est déterminée par une seule couche turbulente à une hauteur donnée h , alors chaque structure de turbulence va induire une fluctuation d'intensité dans l'image plan-pupille qui subit un allongement d'autant plus important que la couche de turbulence est haute.

Par une argumentation basée sur l'approximation de l'optique géométrique, l'allongement dans le sens de la largeur de la fente est donnée au premier ordre par la largeur de la fente w_y multipliée par la hauteur h [19, 16], et l'allongement dans le sens parallèle à la fente est donné approximativement par la profondeur angulaire de la fente à l'intérieur du disque solaire multipliée par la hauteur h .

Dans le cas multicouche on n'aura pas forcément d'allongement visible des structures de variation d'intensité dans l'image plan-pupille bien que ce soit l'effet affectant la contribution de chaque couche séparément. On aura un mélange de contributions différentes (de la turbulence optique) qui dépend de la largeur de la fente et de la distribution en hauteur de la turbulence atmosphérique dans le cas d'un isoplanétisme local. On aura à la limite une altération des fluctuations d'angle d'arrivée dans le cas d'un anisoplanétisme local, ce qui arrive heureusement assez rarement.

On a donc intérêt à ce que la largeur de la fente soit la plus fine possible pour être le moins soumis à l'anisoplanétisme non-local. Pour l'anisoplanétisme local on n'a pas trop le choix que d'attendre qu'il fasse meilleur.

4.3.5 Simulation de l'observation plan-pupille des fluctuations d'angle d'arrivée pour la turbulence optique diurne

Ce proceedings [16] fait écho à une étude numérique, présentée à un colloque SPIE, sur la mesure plan-pupille des fluctuations d'angle d'arrivée via les mesures de variations d'intensité à travers une fente tel que prévu dans le cadre du développement du moniteur MISOLFA [85, 15] pour la mesure du *seeing* solaire. Y sont essentiellement traités les effets de la diffracton à travers la fente, l'effet de l'assombrissement centre-bord (composantes linéaires et non-linéaires) et l'anisoplanétisme monocouche dans le cadre de l'approximation du champ proche. L'anisoplanétisme local et isoplanétisme local y sont discutés dans le cadre d'une turbulence monocouche avec l'approximation du champ proche.

Simulation of pupil-plane observation of angle-of-arrival fluctuations in daytime turbulence

A. Berdja^a, A. Irbah^a, J. Borgnino^b and F. Martin^b

^aCRAAG - Observatoire d'Alger, BP 63 Bouzaréah, Algiers, Algeria

^bUniv. Nice-Sophia Antipolis, UMR 6525 - Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2, France

ABSTRACT

High angular resolution observations of the sun are limited by atmospheric turbulence. The MISOLFA seeing monitor (still under construction) is developed to obtain spatial and temporal statistical properties of optical turbulence by analyzing local motions observed on solar edge images. The solar Flying Shadows used for Angle-of-Arrival spatio-temporal analysis are observed in the pupil-plane image by mean of a rectangular thin slit positioned on the solar edge image. A numerical simulation of the light propagation in both the atmospheric turbulence medium and the MISOLFA optical system is carried out studying the relation of the measured intensity variations in the pupil-plane to Angle-of-Arrival fluctuations in the non-isoplanatic case. First results are presented and discussed.

Keywords: Site testing, Atmospheric turbulence, Remote sensing

1. INTRODUCTION

Observations of the Sun at High Angular Resolution using ground-based telescopes need an accurate modelling of the optical effects induced by atmospheric turbulence. To illustrate the problem, we consider the case of solar diameter measurements. Since more than 25 years, diameter measurements are performed at Calern Observatory (Observatoire de la Côte d'Azur) with the solar astrolabe showing inexplicable apparent variations.¹ More recently, a new experiment (DORaySol)³ has been implemented on the same site for the same objectives. Soon (2007-2008), a spatial experiment (PICARD (CNES)) will be launched to perform solar diameter and solar irradiance measurements in Space.² SODISM II, a replica of one of PICARD instruments, will be installed near the two present operational experiments of the Calern site to allow simultaneous measurements. The main objectives are the comparison of the results deduced firstly from spatial data and secondly from ground data, as well as the evaluation of atmospheric turbulence optical effects on measurements performed from the ground. The ground observations will thus, be qualified using space data and appropriate inverse techniques.

A seeing monitor must allow the modelling of these effects. It must give, in the framework of a turbulent model (Von Kármán's model, for example), the values of the integrated optical parameters (Fried's parameter r_0 , spatial coherence outer scale \mathcal{L}_0 , size of isoplanatic patch θ_0 , correlation time for the fluctuations τ_0), but also the vertical profile of the optical turbulence energy given by the structure constant of the air refractive index fluctuations $C_n^2(h)$. Such a generalized monitor could be used for evaluation of sites where telescopes dedicated to the Sun observations should be installed but also could equip every solar observatory. MISOLFA (*Moniteur d'Images SOLaires Franco-Algérien*) is developed for that purpose.

The MISOLFA principle is based on the statistical analysis of Angle-of-Arrival (AA) fluctuations, which are fluctuations at each point of the normal of the perturbed wave-fronts. The AA-fluctuations can directly be observed in the image plane (case of Shack-Hartmann's sensors used in adaptive optics) but also in the pupil plane if the observed astronomical sources (for example, Sun or Moon) present an intensity distribution with a strong discontinuity.

The monitor experimental device is built so as to have 2 analysis ways (Fig. 1). On the first way, a CCD camera placed on the solar limb image allows to record directly the AA-fluctuations.⁸ A beam splitter creates a second way, named in the following *pupil plane observation way* in which the telescope pupil is observed through a narrow slit placed on the solar limb image.

Send correspondence to A. Irbah : E-mail: irbah@aerov.jussieu.fr, Telephone: +33 (0)1 64 47 43 58, Address: Service Aéronomie, B.P. 3, 91371 Verrières le Buisson, France

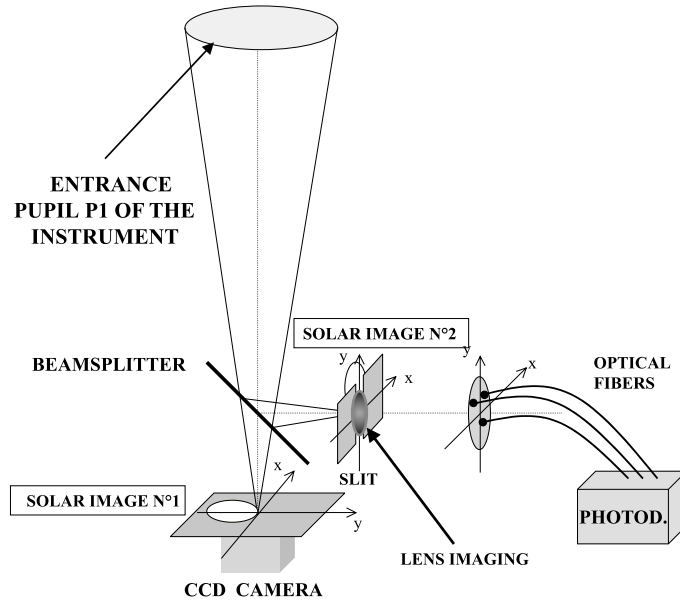


Figure 1. MISOLFA : experimental device.

2. PUPIL-PLANE OBSERVATION WAY OF MISOLFA

Many works have been developed on image plane observations^{9, 16} but few ones on the pupil-plane observations. Thus, a complete numerical simulation of this observation way is needed to better understand all filtering affecting AA-fluctuation measurements performed in the pupil-plane.

The *pupil-plane observation way* of MISOLFA consists in imaging the telescope entrance pupil with a recombining lens through a narrow diaphragm placed in the focal plane on the solar limb. The diaphragm size is some arc-seconds wide and about fifty arc-seconds length. To record pupil intensity fluctuations, several photodiodes connected via optical fibers will be put on the image behind diaphragms of different sizes. This signal given by the different photodiodes will be simultaneously recorded. A spatiotemporal analysis may be performed leading to estimate all atmospheric parameters.

Geometrical optics will be helpful to understand how the *pupil plane observation way* of MISOLFA works. Light rays of the atmospheric perturbed wave-front undergo random angles and pass or no through the diaphragm. Thus, the pupil illumination observed through the diaphragm will be related to the local slopes of the wave-front.

In case of an extended source, the good situation is that a linear relationship exists between intensity variations $I(\vec{r})$ in the pupil-plane image and AA-fluctuations $\underline{\alpha}(\vec{r})$ at the entrance pupil :

$$\underline{\alpha}(\vec{r}) \propto I(\vec{r}) \quad (1)$$

where \propto denotes the proportionality operator.

Previous works have shown however, the goodness at the first order of the relationship between intensity and AA-fluctuations.^{5, 6} Now, we will study the validity limits of Equation (1). We present first in the next section, the theoretical aspects used for developing the numerical simulation.

3. THEORETICAL MODEL

We need a mathematical formulation to perform the numerical simulation of the occurring process. In a first stage, we consider a monochromatic wave coming from a given point-source situated in the $\vec{\alpha}_0$ direction, where $\vec{\alpha}_0$ denotes a two-dimensional angle. The complex amplitude of such a wave at ground level may be expressed as

$\sqrt{I_0(\vec{\alpha}_0)}\psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})\exp(\frac{2\pi i}{\lambda}\vec{\alpha}_0\vec{r})$, where \vec{r} is a space vector in the pupil-plane, λ the monochromatic wave length, $I_0(\vec{\alpha}_0)$ an angular distribution of the incident light intensity and $\psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})$ is the normalized turbulence-disturbed complex amplitude of the light wave.

3.1. Diffraction Through the Entrance Pupil

The propagation through the telescope of the wave-front limited to its entrance pupil forms a Fraunhofer diffraction pattern in the instrument focal plane. The angular distribution $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ is then expressed by :

$$K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha}) \propto \int d\vec{r} G_p(\vec{r}) \sqrt{I_0(\vec{\alpha}_0)} \psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r}) \exp(\frac{2\pi i}{\lambda}\vec{\alpha}_0\vec{r}) \exp(\frac{-2\pi i}{\lambda}\vec{\alpha}\vec{r}) \quad (2)$$

where $\vec{\alpha}$ are two-dimensional angular coordinates. $G_p(\vec{r})$ is the so-called pupil function equal to one inside the pupil area and to zero outside.

Let us note $TF_0(f(\vec{r})) = F(\vec{\alpha})$ the Fourier transform of $f(\vec{r})$ evaluated for the reduced space frequencies \vec{r}/λ : $TF_0(f(\vec{r})) = \int d\vec{r} f(\vec{r}) \exp(\frac{-2\pi i}{\lambda}\vec{\alpha}\vec{r})$. Equation 2 is then rewritten as :

$$K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha}) \propto TF_0(G_p(\vec{r}) \sqrt{I_0(\vec{\alpha}_0)} \psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r}) \exp(\frac{2\pi i}{\lambda}\vec{\alpha}_0\vec{r})) \quad (3)$$

$K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ is a speckled angular distribution of complex amplitude and $|K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})|^2$ is the so-called *PSF* (Point-Spread Function) used in image formation theory. It is a speckle image of the point source as shown in the third figure of Fig. 5.

The speckled distribution $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ is not centered on the optical axis but is in the $\vec{\alpha}_0$ incidence angle direction. Thus, it is more or less masked according to its position relatively to diaphragm borders (see the fourth figure of Fig. 5).

3.2. Pupil Image Reconstruction Over the Diaphragm

The pupil-plane image is formally obtained by operating an inverse Fourier transform on the complex amplitude $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ over the diaphragm : $TF_0^{-1}(F(\vec{\alpha})) = \int d\vec{\alpha} F(\vec{\alpha}) \exp(\frac{2\pi i}{\lambda}\vec{\alpha}\vec{r})$. The complex amplitude $K'_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})$ obtained at the observation plane is then given by :

$$K'_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r}) \propto TF_0^{-1}(G_s(\vec{\alpha}) K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha}) \exp(\frac{2\pi i}{\lambda}\vec{\alpha}\vec{r})) \quad (4)$$

where $G_s(\vec{\alpha})$ is the angular transmission of the diaphragm.

In both Equations (3) and (4), we have not taken into account symmetries induced by the internal reflecting light within the telescope. However, the pupil image coordinates can easily be scaled so as to correspond to the entrance pupil ones.

Since $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ is relatively not centered onto $G_s(\vec{\alpha})$, the partial masking will be more or less important depending directly of \vec{r} and the angular distribution itself. Intensity fluctuations $I_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r}) = |K'_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})|^2$ will be then observed in the pupil-plane image. They are what we are calling the *Flying Shadows* obtained for the incidence angle $\vec{\alpha}_0$.

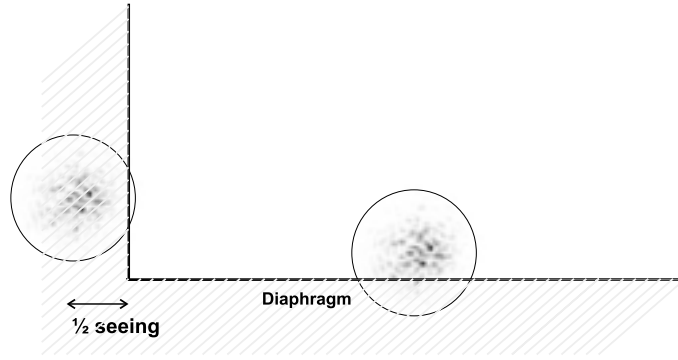


Figure 2. Two intensity distributions (*PSF*'s) partially masked by diaphragm borders. The *PSF* left-side contributes to the pupil-plane image formation unless it is situated at 1/2 seeing angle outside the diaphragm area.

3.3. The Case of an Extended Source

The resulting intensity fluctuations for an extended source in the pupil-plane image is the summation over the angular field-of-view allowed by the optical system of all source-point intensity contributions. The diaphragm angular size conjointly to the seeing angle define the angular integration domain as shown in Fig. 2.

If we express the finite angular integration domain by an angular transmission function $G_{s,seeing}(\vec{\alpha}_0)$, the intensity image of the pupil-plane is then given by :

$$I(\vec{r}) \propto \int d\vec{\alpha}_0 G_{s,seeing}(\vec{\alpha}_0) |TF_0^{-1}(G_s(\vec{\alpha}) \exp(\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\alpha} \vec{r})) TF_0(G_p(\vec{r}) \sqrt{I_0(\vec{\alpha}_0)} \psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r}) \exp(\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{\alpha}_0 \vec{r}))|^2 \quad (5)$$

Equation 5 is the basic mathematical model used to develop the numerical simulation presented in this work.

4. EXPECTED OPTICAL LIMITATIONS

The use of a diaphragm of a finite size in the focal plane introduces additional effects which limit *AA*-fluctuation analysis from intensity measurements of the pupil-plane images. Two effects were highlighted and have been studied by Borgnino and Martin.⁵ They are related to the *diffraction* and *angular* filtering by the diaphragm.

4.1. Diffraction Filtering

Diffraction over the diaphragm causes a blurring on the resulting pupil-plane images due to a space-frequency filtering. This filtering is not easy to express and we will consider Equation (2) to summarize it. From this Equation, $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ can be considered as the complex spectrum of the spatial contents of the perturbed wavefront at the entrance pupil (expressed by $\psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})$). This spectrum is randomly limited by the diaphragm area due to both the angular positions $\vec{\alpha}_0$ and the speckled pattern $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ itself carrying out to express with difficulty the introduced filtering.

To illustrate the diffraction filtering, Fig. 3 shows a simulation of intensity patterns obtained for an extended source in case of three different diaphragm widths and unspecified seeing conditions.

Although these enumerated conceptual difficulties, it is possible to have a significant description of diffraction blurring⁵ by considering some average behavior in case of an extended source. A diaphragm with an angular width w_x allows to observe in the pupil plane details with angular separation greater than about λ/Fw_x , F denoting the telescope focal length. In the entrance pupil plane, they correspond to spatial separations of about λ/w_x . Thus, the presence of the diaphragm in the focal plane is equivalent to a high spatial frequency filter with a cut-off frequency f_d given by :

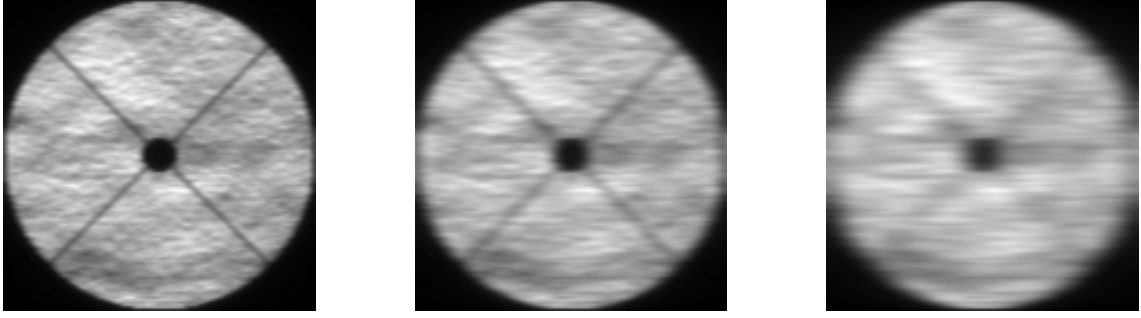


Figure 3. Simulation of Flying Shadows of an extended object of uniform luminosity (no darkening) obtained for three different diaphragm widths (see Sect.5.1). For all cases, the same optical turbulence is considered at the entrance pupil and near-field approximation is assumed. The angular width w_x of diaphragms is respectively equal from the left to the right, to $8''$, $4''$ and $2''$.

$$f_d \approx w_x/\lambda \quad (6)$$

According to this known filtering, we have to use a diaphragm as large as possible. However, increasing the diaphragm width has consequences on the angular filtering.

4.2. Angular Filtering

In case of an extended source such as the sun, the image obtained with the *pupil plane observation way* of MISOLFA is the superposition of all individual images formed by each source-point located by its angular position $\vec{\alpha}_0$ (see section 3.3). It means that the turbulence-induced perturbations are integrated over the angular field-of-view, which in our case is limited to the angular extent of the diaphragm and to the local average seeing angle (see Sect.3.3).

Anisoplanatism expresses the dependence of the optical turbulence with lines-of-sight. It is more or less important following the turbulent layer positions and angular separations of object points. Thus, the angular integration introduces an additional blurring on pupil plane images corresponding to another space frequency filtering.

Figure 4 shows image blurring effect induced by anisoplanatism in case of an extended object. It shows that blurring in the pupil plane images depends also on seeing conditions via anisoplanatism.

This anisoplanatic filtering is also not easy to express but some simple considerations lets to have a significant estimation.

Geometrical considerations allow to say that details in a turbulent layer situated at an altitude h have spatial dimensions on the pupil plane of about hw_x . As a consequence, we are not able to see on the pupil plane images, turbulence features smaller than about hw_x for the considered single turbulent layer at the altitude h . We can then define a spatial cut-off frequency f_a for the anisoplanatism angular filter as :

$$f_a \approx 1/hw_x \quad (7)$$

According to this additional filtering, we better use a diaphragm as thin as possible but in this case, the diffraction filtering increases.

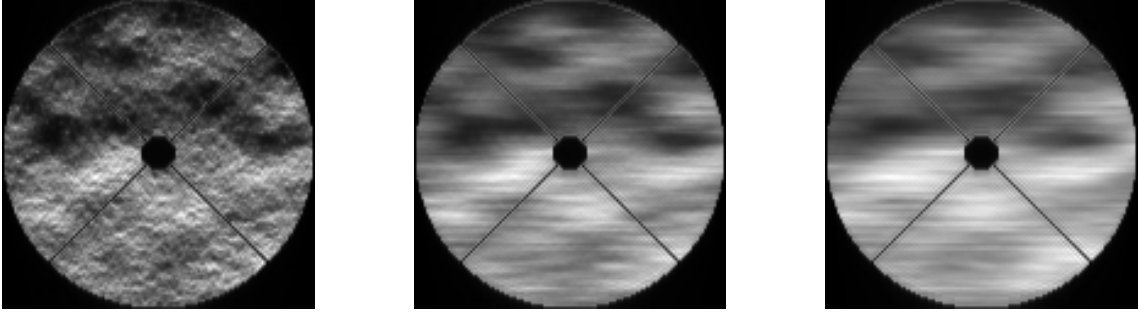


Figure 4. Simulation of Flying Shadows obtained for an extended source in both isoplanatic and anisoplanatic cases (see Sect.5.1). The object has a uniform luminosity (no darkening) and a same optical turbulence is considered at the entrance pupil. The diaphragm width w_x is equal to $5''$ for all figures. In the left figure, total isoplanatism is assumed contrarily to the others where anisoplanatism is considered along the diaphragm width. In the third one, bad seeing is also considered ($\approx 10''$). The turbulent layer properties are $h = 500m$, $r_0 = 1cm$ and $\mathcal{L}_0 = 10m$. Note that anisoplanatic filtering would be more important along the diaphragm length and will depend on the solar darkening profile.

4.3. The Choice of Diaphragm's width

The previous developments on the *diffraction* and *angular* filtering by the diaphragm show antagonist effects. In fact, for a given altitude of the turbulent layer, the optical system is mostly limited by anisoplanatism if w_x is too large and the limitation comes from diffraction if w_x is too small.

As shown by Borgnino and Martin,⁵ the best practical compromise for w_x is certainly the case for which the two filtering are equivalent so that $f_a \approx f_d$ and then :

$$w_x \approx \sqrt{\lambda/h} \quad (8)$$

In case of observations performed with MISOLFA at a wavelength λ equal to $535.7nm$, a diaphragm width $w_x = 5''$ allows to remote turbulent layers lower than $h = 911m$.

4.4. Scintillation

In most of seeing monitors based on *AA*-fluctuation measurement analysis, scintillation is neglected and near-field approximation is assumed. In the pupil plane observation approach, scintillation cannot be ignored since we measure intensity fluctuations. Indeed, intensity measurements could be perturbed by scintillation if turbulent layers are localized at high altitudes.

However, for MISOLFA's diurnal measurements, it is expected that turbulent layers are mostly situated near the ground so that scintillation effects could be negligible.

5. NUMERICAL SIMULATION - FIRST RESULTS

5.1. Obtaining Flying Shadows by Simulation

The numerical simulation is based on the formal description of the optical device expressed by Equation 5.

First at all, we have to provide instantaneous complex amplitude $\sqrt{I_0(\vec{\alpha}_0)}\psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})$ of atmospheric perturbed wave-fronts at the telescope entrance pupil. We assume that the optical effects induced by the whole turbulence may be expressed as an equivalent single turbulent layer positioned at a given altitude h above the instrument. To calculate $\psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})$ for every $\vec{\alpha}_0$, we take the part of the simulated turbulent layer corresponding to its projection over the telescope pupil following the $\vec{\alpha}_0$ direction. The perturbed wave-fronts are obtained using a modified Monte Carlo procedure refereed as Nakajima's method.¹⁴ Optical perturbations from this method are the

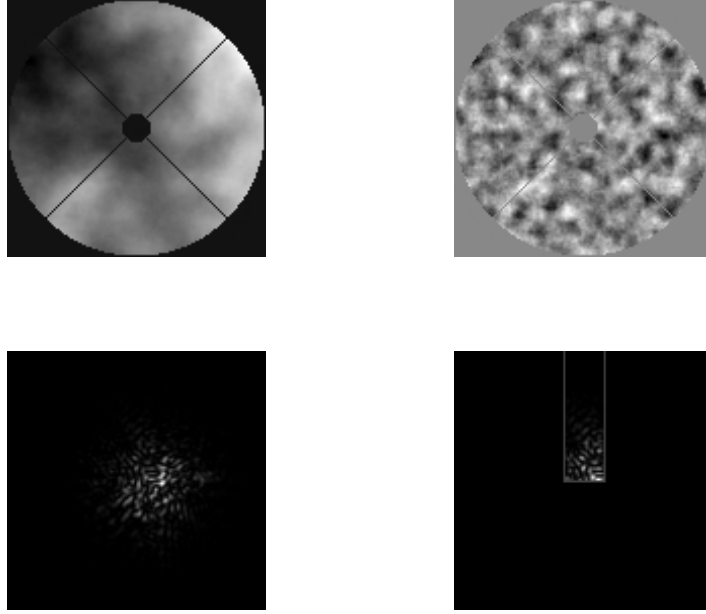


Figure 5. Figures showing some steps of simulation (see Sect.5.1) in case of a single point-source located in α_0 angular direction. They are obtained for a same optical turbulence at the entrance pupil. The figures on the top (from left to right) are phase and amplitude distributions simultaneously generated for the optical wave-front $\psi_{\alpha_0}(r)$ at the entrance pupil. The figures on the bottom represent respectively the intensity of the angular distribution $K_{\alpha_0}(\alpha)$ (*PSF*) (left) and the portion of $|K_{\alpha_0}(\alpha)|^2$ passing through the diaphragm placed in the focal plane.

inverse Fourier transform of a random complex quantity which statistical variance is equal to the theoretical one corresponding to the considered model (Kolmogorov, Von Kàrmàn ...).

The optical turbulence simulator we implemented gives simultaneously phase and amplitude fluctuations corresponding to the same generated turbulence sample (see Fig. 5).

A Fourier Transform is then applied to $\psi_{\alpha_0}(\vec{r})$ limited to the telescope pupil area in order to obtain the angular distribution of the complex amplitude $K_{\alpha_0}(\vec{\alpha})$ in the focal plane. Fig. 5 shows its intensity which corresponds also to the *PSF*. Note that the influence of α_0 will be taken into account after when diaphragm effects will be considered. A special attention is accorded in the simulation to the sampling path of the $K_{\alpha_0}(\vec{\alpha})$ -matrix which is wavelength dependence.

The diaphragm effects consist by keeping a randomly part of $K_{\alpha_0}(\vec{\alpha})$ (see Fig. 5). The extracted part is linked to the relative angle α_0 which expresses also anisoplanatism with h in case of the equivalent impulse layer model.

The corresponding pupil-plane image related to the α_0 incidence direction is then obtained by applying an inverse Fourier Transform to $K_{\alpha_0}(\vec{\alpha})$ and taking the square modulus to get the intensity $I_{\alpha_0}(\vec{r})$.

The whole process is repeated for every incident angle α_0 of the angular domain allowed by the second way of MISOLFA optical system (see Sect.3.3). All $I_{\alpha_0}(\vec{r})$ contributions are then summed over this angular domain in order to get the global image intensity $I(\vec{r})$.

5.2. Observation of AA-fluctuations in Pupil-Plane Images

AA-fluctuations are defined by the local slopes of the perturbed wave-fronts. They are formally expressed by the space-derivative of the phase fluctuations at the entrance pupil. We are then able to test the pupil plane

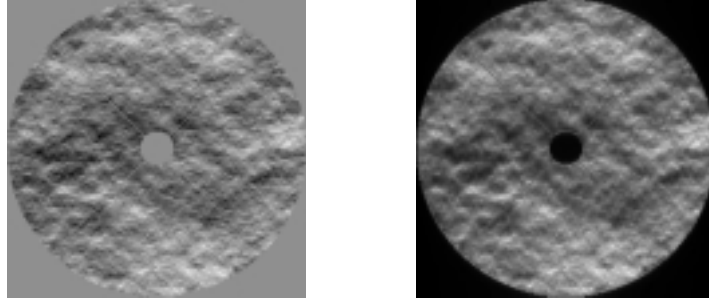


Figure 6. Simulation of AA -fluctuations (left) and corresponding Flying Shadows in the pupil plane image (right). They were obtained for a same optical turbulence at the entrance pupil and an extended source of uniform luminosity in case of total isoplanatism (see Sect.5.1). Note that we have also assumed a very large diaphragm width neglecting the diffraction filtering. As expected for the proposal system, the Flying Shadows observed in the pupil-plane in case of total isoplanatism correspond to the desired AA -fluctuations.

observation method by comparing AA -fluctuations calculated from the simulated phase $\psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})$ with the Flying Shadows expressed by the intensity variations $I(\vec{r})$.

In a first case, we consider that we have total isoplanatism i.e. $\psi_{\vec{\alpha}_0}(\vec{r})$ is the same for all $\vec{\alpha}_0$ incidence angles. We suppose also that $I_0(\vec{\alpha}_0)$ is constant, which corresponds to an uniformly emitting extended-source and having an extremely large diaphragm i.e. the angular distribution $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ is supposed to be masked only by the lower border of the diaphragm neglecting thus, the diffraction filtering. With all theses considerations, we observe that the Flying Shadows match perfectly the AA -fluctuations at the entrance pupil (see Fig. 6). Note that this result supposes also the near-field approximation hypothesis where scintillation is reasonably ignored for diurnal observations (see Sect.4.4).

As the most important condition to the validity of the method is the linearity relationship between intensity and AA -fluctuations (see Equation 1), we also confirm the linearity condition in this special case.

This result shows at the same time the accuracy of the simulation and the validity of the concept for measuring AA -fluctuations from pupil-plane images.

5.3. Solar Limb Darkening Profile's Effect

In case of solar observations with MISOLFA, the source intensity $I_0(\vec{\alpha}_0)$ is not uniform but presents a strong variation from the center to the limb of the Sun.

The effect of the limb darkening profile on Flying Shadows observed in the pupil plane has been theoretically studied by Borgnino¹⁵ in the framework of a polynomial expansion for the cases of linear and non-linear limb darkening functions.

In case of a linear darkening profile, the intensity variations are still proportional to AA -fluctuations. Contrarily, if the limb darkening profile is non-linear, the relation between intensity and AA -fluctuations is slightly non-linear. This result has also been confirmed by simulation¹¹ in case of total isoplanatism and near-field approximation hypothesis.

The optical effects such as anisoplanatism and limb darkening intensity variation are locally significant on a limited angular extent around diaphragm borders (see Fig. 2). We can consider in case of the Sun that the limb darkening profile is almost linear on a small angular field-of-view (few arc-seconds). We can then conclude in case of isoplanatism and the near-field approximation hypothesis that the intensity variations in pupil-plane images are proportional to the AA -fluctuations at the entrance pupil, as expressed by Equation 1.

To ensure this conclusion we use in the simulation, an approximation model for the solar limb darkening function.¹⁶ Fig. 7 shows the linearity relationship obtained from the simulation between intensity measurements

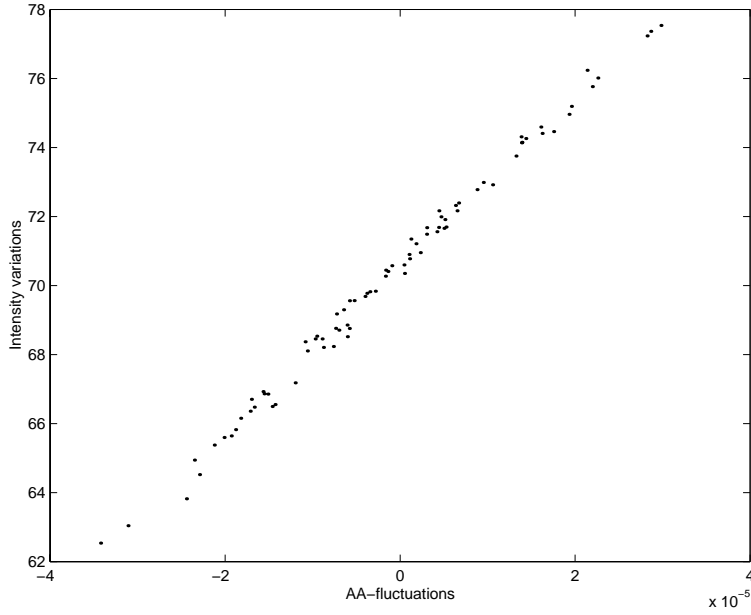


Figure 7. Good linearity observed between intensity variations in pupil-plane images (Flying Shadows patterns) and simulated AA -fluctuations at the entrance pupil (see Sect.5.1). The simulation was implemented in an isoplanatic case with $r_0 = 2cm$, $\mathcal{L}_0 = 10m$, $h = 400m$, $w_x = 5''$ and in the near-field approximation case. Both AA -fluctuations and Intensity variations are integrated over a circular photodiode area with a diameter of about $2.5cm$ on pupil entrance.

computed from the Flying Shadows in the pupil plane image and simulated AA -fluctuations at the entrance pupil.

6. DISCUSSION AND PERSPECTIVES

Anisoplanatism appears to be the most fundamental limitation in the transformation process of AA -fluctuations to intensity variations by the *pupil-plane analysis way* of MISOLFA.

We may first consider the case in which optical turbulence and hence $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$, is locally isoplanatic at least over the angular extent where the filtering by diaphragm borders occurs. In this situation, the obtained Flying Shadows correspond to the true AA -fluctuations. For large diaphragms, the intensity $I(\vec{r})$ corresponds to the sum of AA -fluctuations from isoplanatic zone with others along the diaphragm edge. This situation is the case of very low turbulent layers, a typical configuration of daytime turbulence.

In case of local anisoplanatism, we may consider $K_{\vec{\alpha}_0}(\vec{\alpha})$ varying from an angle $\vec{\alpha}_0$ to another within the extent of seeing angle believed to be diaphragm angular domain effects. The relation between intensity variations in pupil-plane images and AA -fluctuations at the entrance pupil is then questionable and could not be directly expressible. The role of the simulation is to estimate if the Flying Shadows correspond to a summation over $\vec{\alpha}_0$ of AA -fluctuations to ensure if linearity is still valid and eventually to qualify the introduced errors. It is however expected as demonstrated in Sect.4.2 that the method of observing intensity variations on the pupil-plane image remain valid for low turbulent layers.

The *pupil-plane observation way* of MISOLFA enables to measure the AA -fluctuations on the entrance pupil using intensity variations. The statistical treatment of AA -fluctuations is by far, widely investigated and implemented in nighttime site testing monitors as for the Generalized Seeing Monitor (GSM).¹⁷ It could be then directly applied on diurnal data measurements to retrieve the statistical properties of daytime turbulence.

For example, the pupil-plane method applied to a large telescope could serve to adjust the daytime turbulence models by means of a two-dimensional covariance or structure function of AA -fluctuations.¹⁸ These statistical

functions could be obtained for every baseline and every orientation (relatively to AA -fluctuations) allowed on the pupil-plane area.

In MISOLFA, the used photodiode detectors represent various collecting surfaces of the pupil-plane. They allow fast recordings and thus an accurate intensity signal time sampling. Such measurement time series will be used to study temporal properties of the diurnal turbulence and continuously estimate the correlation time τ_0 of AA -fluctuations.

Such as for other seeing monitors like the well-known DIMM or GSM, dual measurements from photodiode pairs on the same collecting surface will allow also estimate the Fried parameter r_0 . An accurate calibrating of AA -fluctuations obtained from measured intensity variations is however needed for this purpose.

The goal of using photodiode detectors with different collecting surfaces is to estimate the spatial coherence outer scale \mathcal{L}_0 from AA -fluctuation statistics.¹⁹ Outer scale \mathcal{L}_0 has been widely investigated in case of nighttime turbulence but still unknown in case of daytime optical turbulence. However, it is expected that the values would be smaller than the ones obtained for nighttime measurements. The method used in MISOLFA will depend on the collecting surfaces of the photodiode detectors. A specific study will be developed to ensure sufficient sensitivity to outer scale effects.

Good estimation of turbulence parameters are strongly linked to AA -fluctuation measurements. Thus, we need to well understand all effects affecting the atmospheric parameter estimation from filtered AA -fluctuation measurements and how to optimize them. It will be eventually useful to include these filtering directly into models describing the filtered AA -fluctuation statistics as a function of the optical turbulence parameters.

These are all the principal short-term perspectives for this simulation.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been performed with support of *the Algerian Research National Program (PNR)* and the French Foreign affair Ministry in the framework of scientific cooperation between France and Algeria (contract 00 MDU 501)

REFERENCES

1. F. Laclare, C. Delmas, J. P. Coin, and A. Irbah, "Measurements and Variations of the Solar Diameter," *Solar Physics* **166**, pp. 211–229, 1996.
2. <http://smc.cnes.fr/PICARD/index.htm>
3. C. Delmas, "Measurements of the Sun's Radius at Calern Observatory," *Lecture Notes in Physics* **599**, *The Sun's Surface and Subsurface : Investigating Shape and Irradiance*, Ed. : Rozelot J P, p. 196, Springer Conference Series, p. 196, 2003.
4. J. Borgnino, F. Martin, and F. Roddier, "Localisation de couches turbulentes atmosphérique par traitement optique de clichés d'ombres volantes stellaires," *Nouv. Rev. Optique* **6**, pp. 15–23, 1975.
5. J. Borgnino, and F. Martin, "Analyse statistique des déformations aléatoires d'une surface d'onde dues à la turbulence atmosphérique au voisinage du sol, I.- Exposé de la méthode, Premiers résultats," *J. Optics (Paris)* **8**, pp. 319–326, 1977.
6. J. Borgnino, and F. Martin, "Analyse statistique des déformations aléatoires d'une surface d'onde dues à la turbulence atmosphérique au voisinage du sol, II.- Estimation des fonctions de corrélation par traitement numérique," *J. Optics (Paris)* **9**, pp. 15–24, 1977.
7. J. Borgnino, and F. Martin, "Correlation between angle-of-arrival fluctuations on entrance pupil of a solar telescope," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, pp. 1065–1072, 1977.
8. A. Irbah, J. Borgnino, F. Laclare, and G. Merlin, "Isoplanatism and high spatial resolution solar imaging," *Astron. Astrophys.* **276**, pp. 663–672, 1993.
9. A. Irbah, M. Chibani, L. Lakhal, A. Berdja, J. Borgnino, F. Martin, and P. Assus, "MISOLFA : a generalized solar seeing monitor," *SF2A-2001: Semaine de l'Astrophysique Française*, Eds.: F. Combes, D. Barret, F. Thévenin, p.59, published by EdP-Sciences, Conference Series, meeting held in Lyon, France, May 28-June 1st, 2001.

10. A. Berdja, A. Irbah, and J. Borgnino, "Simluation of the anisoplanatic angle-of-arrival fluctuations measured on the solar edge images," *SF2A-2002: Semaine de l'Astrophysique Française*, Eds.: F. Combes and D. Barret, p. 215, EdP-Sciences (Editions de Physique), Conference Series, meeting held in Paris, France, June 24-29, 2002.
11. A. Berdja, A. Irbah, J. Borgnino, and F. Martin, "Simulation of Angle-of-Arrival fluctuations as observed in the MISOLFA pupil-plane," *SF2A-2003: Semaine de l'Astrophysique Française*, Eds.: F. Combes, D. Barret and T. Contini, p. 158, EdP-Sciences, Conference Series, meeting held in Bordeaux, France, June 16-20, 2003.
12. A. Bouzid, A. Irbah, J. Borgnino, and H. Lanteri, "Atmospheric Turbulence Profile Estimation from Fluctuation Analysis of Extended Object Images," *European Rocket and Balloon Programs and Related Research, Proceedings of the 14th ESA Symposium*, Edited by B. Schürmann. European Space Agency, ESA-SP, **Vol. 437**, p.453, 1999.
13. J. Borgnino, and J. Vernin, "Experimental verification of the inertial model of atmospheric turbulence from solar limb motion," *J. Opt. Soc. Am.* **68**, pp. 1056–1062, 1978.
14. T. Nakajima, "Signal-to-noise ratio of the bispectral analysis of speckle interferometry," *J. Opt. Soc. Am.* **5**, pp. 1477–1491, 1988.
15. J. Borgnino, "Étude de la dégradation des images astronomiques diurnes par analyse statistique des fluctuations d'angle d'arrivée," Doctorat thesis, Nice university, 1978.
16. L. Lakhal, A. Irbah, C. Aime, J. Borgnino, and F. Martin, "Estimation of turbulence parameters from solar observations," *Proc. SPIE, Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems IV*, **Vol. 4538**, p. 112-118, 2002.
17. A. Ziad, R. Conan, A. ToKbvinin, F. Martin, and J. Borgnino "From the Grating Scale Monitor to the Generalized Seeing Monitor," *Applied Optics* **39**, p. 30, 2000.
18. R. Avila, A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin, A. Agabi and A. A. Tokovinin, "Theoretical spatio-temporal analysis of angle of arrival induced by atmospheric turbulence as observed with the Grating Scale Monitor Experiment," *J. Opt. Soc. Amer. A* **14**, p. 11, 1997.
19. A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin, and A. Agabi, "Experimental estimation of the spatial-coherence outer scale from a wavefront statistical analysis," *Astronomy and Astrophysics* **282**, pp. 1021–1033, 1994.

4.3.6 Application à l'estimation du profil de l'énergie de la turbulence optique diurne

Ce proceeding, présenté au "*Symposium on Seeing 2007*" à Kona-Hawaii, est un exposé d'une étude préliminaire et encore en cours sur la conception d'un moniteur profileur de la turbulence optique basses-couches basé sur la mesure dans le plan-pupille des fluctuations d'angle d'arrivée et sur les méthodes de triangulation inspirées du SLODAR [36]. Il y est démontré que l'on peut atteindre de bonnes résolutions en altitude avec cette approche. Il n'y ait pas présenté de considérations sur les effets de la scintillation. Celle-ci, avec les solutions proposées dans le paragraphe 4.3.8 ne change pas de manière significative la résolution atteinte en altitude avec le profileur, notamment pour les basses couches turbulentes.

Le format de la présentation a été modifié pour minimiser l'espace qu'elle occupe dans le présent document.

An Optical Turbulence Profiler for the terrestrial atmosphere boundary-layer

Julien Borgnino * Amokrane Berdja Aziz Ziad

Jérôme Maire

LUAN (Laboratoire Universitaire d'Astrophysique de Nice)

Université de Nice Sophia Antipolis

Abstract

The concept of a profiler for the optical turbulence is presented. The aim is the study of the effects of turbulence in the terrestrial atmosphere boundary-layer and this with a high altitude resolution. This profiler may work in daytime conditions observing the limb of the Sun (this is the case which will be treated here), but also in nighttime conditions observing the limb of the Moon. The wavefront analysis is performed observing the telescope pupil through a diaphragm (thin slit) placed on the solar (eventually lunar) limb. In the pupil image, one observes intensity fluctuations, which are, at the first order, proportional to angle-of-arrival (AA) fluctuations, indeed to the component considered in the direction perpendicular to the limb. This profiler is similar to a SLODAR since one can obtain simultaneously two maps of this component corresponding to two directions (two diaphragms) with an angular separation θ . This consists in a triangulation method. Calculating, at one dimension considered parallel to the limb, spatial cross-correlations leads to the vertical distribution of optical turbulence energy $C_n^2(h)$. The angular separation between the two diaphragms may be easily changed and thus the vertical resolution and the maximum sensing altitude. Very large separations may be reached and so high altitude resolutions may be expected. The Fried parameter r_0 may be deduced from estimations of the transverse and longitudinal AA structure functions, as with a Differential

* *Corresponding author address:* Julien Borgnino, LUAN, Université de Nice Sophia Antipolis, 28 Avenue Valrose, Nice, France.

E-mail: Julien.Borgnino@unice.fr

Image Motion Monitor (D.I.M.M.). Finally, using sub-apertures of different sizes allows the estimation of the spatial coherence outer scale L_0 .

1 Introduction

The implementation of High Angular Resolution modern techniques for astronomical observation and particularly the development of Adaptive Optics under its different forms need the knowledge of the altitude distribution of atmospheric turbulence as well as its statistical properties. The part of the Earth's atmosphere which holds a particular attention is the boundary layer (typically $h < 1\text{km}$), but also the superficial layer which extends approximately on the first 100m. Dedicated experiments have been built allowing measurements of the total turbulent energy (Differential Image Motion Monitor (DIMM), Sarazin et al. 1990) or of turbulence vertical distribution with an altitude resolution more or less high (Multi-Aperture Scintillation Sensor (MASS), Kornilov et al. 2003, Tokovinin et al. 2003, Generalized-SCIntillation Detection And Ranging (G-SCIDAR), Avila et al. 1997, Johnston et al. 2002, SLOpe Detection And Ranging (SLODAR), Wilson 2002, Butterley et al. 2006, the observables being the luminous intensity (star scintillation) or the wave-front angle of arrival. During the last period efforts have been provided to study, observing scintillation, the optical effects due to turbulence in the terrestrial atmosphere boundary-layer and particularly in the first hundreds of meters (Avila et al. 2004, Tokovinin 2007). Finally, a new instrument, the Monitor of Outer Scale Profile (MOSP) is now operating (Maire et al. 2007). Results have been obtained during two observation campaigns at the Mauna Kea Observatory (Hawaii) and Observatoire de Haute Provence (France) (see the extended abstract: MOSP: Monitor of Outer Scale Profile, by Ziad et al. (Symposium on Seeing, Kona, March 2007)).

In this paper is presented the principle of an optical turbulence profiler based on the observation of angle-of-arrival (AA) fluctuations shown pointing the solar limb. These fluctuations are transformed in intensity fluctuations using a technique similar to the Foucault test used to evaluate optical surface quality (Borgnino et al. 1977). The telescope pupil is observed through a diaphragm placed on the solar (lunar) limb. One can thus speak about *Solar Flying Shadows (SFS)* (or eventually about *Lunar Flying Shadows (LFS)* if the lunar limb is observed). Operating this technique has already allowed estimations of longitudinal and transverse AA covariances (Borgnino et al. 1977) and experimental

verification of the Kolmogorov-Tatarskii model on small baselines (of the order of 30cm) (Borgnino et al. 1978). Here, the principle of the wave-front analysis is preserved, but the proposed experiment allows differential estimation of the Fried parameter r_0 . For that the instrument is similar to the DIMM used for stellar observations and may be compared to the S-DIMM used for solar observations (Beckers 2001, Beckers 2002). Moreover, it may allow the estimation of the spatial coherence outer scale L_0 from the calculation of variances of AA fluctuations for sub-apertures of different sizes.

One can also deduce the evolution characteristic time for these fluctuations. Its main function will be however the estimation with a high altitude resolution of the turbulent energy profile in the terrestrial atmosphere boundary-layer. The telescope pupil is simultaneously observed through two diaphragms placed on the solar limb at the focus. Then, calculating cross-correlations may lead to profile estimations. The concept of this profiler is similar to that of the SLODAR.

2 Wavefront analysis : *Solar Flying Shadows (SFS)*

2.1 Principle and first order approximation

2.1.1 Presentation

Here, is presented the principle of a method used to analyze perturbed wavefronts, in which the telescope pupil is observed through a diaphragm of a few arcseconds positioned on the image of the solar limb at the focus. One observes intensity fluctuations which are a first order approximation of AA fluctuations. This approximation will be justified in the following. One can note filtering effects (angular filtering and diffraction) induced by the diaphragm. Below, the intensity fluctuations are firstly formalized when the solar limb luminance may be approximated as a linear variation. Then, non-linear effects due to the solar limb-darkening are discussed.

Wavefronts perturbed by atmospheric turbulence present variations compared to the wave average plane which fluctuate in time. In the framework of geometrical optics, luminous rays normal to these wavefronts undergo angular displacements related to the surface slope which are locally assimilable to plane portions making with the average plane angles varying randomly in time. One can consider that at each coherence

area of the wavefront corresponds a solar limb image on the diaphragm. This image enters more or less inside this diaphragm, so that the intensity at each point of the pupil seen through the diaphragm is a function of the local slope of the wavefront. Thus, one observes in the pupil image intensity fluctuations all the more important as AA fluctuations will be large.

2.1.2 Expression of the intensity in the pupil image

The experimental device is presented on Figure 1. Let us assume that a monochromatic plane wave, of wavelength λ , coming from an unresolved object on the telescope optical axis, propagates through the turbulent terrestrial atmosphere and reaches the entrance pupil O, described here by the complex transmission $P(\mathbf{r})$, as a perturbed wavefront with a complex amplitude $W(\mathbf{r})$. \mathbf{r} is a vector in planes perpendicular to the optical axis. The image is formed in the focal plane - the focal length is equal to f_T - where is placed a diaphragm S (of complex amplitude transmission $t(\mathbf{r})$) and a lens L (of focal length f_L).

A Fourier optics calculation leads to the intensity distribution in the pupil image (observation plane O.P.) as :

$$I(\mathbf{r}) = \frac{f_T^2}{f_L^2} \int \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \hat{t}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\lambda f_L}\right) \hat{t}^*\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{\lambda f_L}\right) P\left(-\mathbf{r}' \frac{f_T}{f_L}\right) P\left(-\mathbf{r}'' \frac{f_T}{f_L}\right) W\left(-\mathbf{r}' \frac{f_T}{f_L}\right) W^*\left(-\mathbf{r}'' \frac{f_T}{f_L}\right) \quad (1)$$

where $\hat{}$ notes a Fourier transform and \star the conjugation, and where the telescope is assumed without aberrations. If now the unresolved object is observed in an angular direction α with respect to the telescope optical axis, this intensity can be rewritten under the form :

$$I_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{f_T^2}{f_L^2} \int \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \hat{t}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\lambda f_L}\right) \hat{t}^*\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{\lambda f_L}\right) P\left(-\mathbf{r}' \frac{f_T}{f_L}\right) P\left(-\mathbf{r}'' \frac{f_T}{f_L}\right) W\left(-\mathbf{r}' \frac{f_T}{f_L}\right) W^*\left(-\mathbf{r}'' \frac{f_T}{f_L}\right) \exp\left[-2i\pi \frac{\alpha}{\lambda} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\right] \quad (2)$$

For an incoherent extended object with a luminance $O(\alpha)$, the intensity distribution in the pupil image is obtained performing an integration according to the variable α so that:

$$I_0(\mathbf{r}) = \frac{f_T^2}{f_L^2} \int \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \hat{O}\left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}''}{\lambda}\right) \hat{t}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\lambda f_L}\right) \hat{t}^*\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{\lambda f_L}\right) P\left(-\mathbf{r}' \frac{f_T}{f_L}\right) P\left(-\mathbf{r}'' \frac{f_T}{f_L}\right) W\left(-\mathbf{r}' \frac{f_T}{f_L}\right) W^*\left(-\mathbf{r}'' \frac{f_T}{f_L}\right) \quad (3)$$

It is now necessary to express $O(\alpha)$. In the next section one shows that intensity fluctuations observed in the pupil image are directly related to those of the angle of arrival.

2.1.3 Expression of the intensity fluctuations according to the AA fluctuations

If the solar limb luminance is described by an Heaviside distribution $H(\alpha)$ the experimental device of Figure 1 performs exactly a Foucault test of the perturbed wavefront. In a first step and as a first approximation, it is assumed here that the limb profile is proportional to the angular direction α (linear model for the solar limb). In this case, intensity fluctuations observed in the pupil plane image are expressed as a function of $\beta(-\mathbf{r})$, component of AA fluctuations in the direction perpendicular to the limb, under the form of a linear relation (see Appendix) :

$$\tilde{I}_0(\mathbf{r}) = a_1 \frac{f_T}{f_L} \left[\frac{\lambda f_T}{f_L} \right]^2 \left| \hat{t} \frac{\mathbf{r}}{\lambda f_L} \right|^2 * P\left(-\mathbf{r} \frac{f_T}{f_L}\right) \beta\left(-\mathbf{r} \frac{f_T}{f_L}\right) \quad (4)$$

where $*$ symbolizes a convolution product and a_1 is a proportionality factor in the linear model for the solar limb. One can note here that scintillation (W-amplitude fluctuations) and edge effects (derivatives of $P(\mathbf{r})$) have been neglected.

2.2 Numerical simulations

2.2.1 Comparison between intensity and AA fluctuations : calibration

In order to illustrate the above theory, numerical simulations have been performed in a similar way as what was described by Berdja et al. 2004. Here, is presented (Figure 2) a comparison between AA fluctuations (component β) observed directly on the pupil (Figure 2 (a)) and intensity fluctuations observed in the pupil image formed through the slit (Figure 2 (b)) which has here a width equal to 6 arcseconds. The von Kàrmàn model is assumed (Borgnino et al. 1992) with the Fried parameter $r_0 = 4cm$, the spatial coherence outer scale $L_0 = 10m$ and the pupil diameter $D_T = 30cm$. The luminance distribution at the solar limb has been expressed using a model proposed by Hestroffer et al. (1998) (Figure 3). The

influence of the limb-darkening of the Sun will be discussed later.

One can note that the structures in the images appear lengthened in a direction parallel to the limb. This is mainly due to the fact that the phase is derived in the direction perpendicular to this limb. Diffraction due to the diaphragm (typically a thin slit) acts also in the direction parallel to the limb. One can identify same fluctuations of $\beta(x, y)$ in the two images, but in the second case these fluctuations are blurred.

It was seen above that, at the first order, intensity fluctuations observed in the pupil image are proportional to AA fluctuations. Experimentally, a calibration must be performed allowing to relate observed intensity fluctuations to AA fluctuations presented by the perturbed wavefront. For that, the slit could be, for example, shifted stepwise by a micrometer screw and the corresponding change of the mean intensity in the pupil image measured. Numerically, a series of images similar to those presented on Figure 2 allows to obtain the calibration of intensity fluctuations in AA fluctuations. Figure 4 shows the result of this calibration when fluctuations are observed with a sub-aperture of diameter equal to 12cm. A simulation has been carried out without central obscuration. Figure 5 shows the result of the calibration when are considered differential fluctuations of the component $\beta(x, y)$ with sub-apertures of 4cm separated from 17cm in the longitudinal direction (direction perpendicular to the solar limb).

2.2.2 Estimation of the spatial coherence parameters : Fried's parameter r_0 and outer scale L_0

Principles

As already shown by F. Roddier in 1981, the best way to quantify the optical effects of atmospheric turbulence on astronomical images is to measure wavefront perturbations directly in the pupil plane. At the same time, the rapid development of adaptive optics systems have led to analyze perturbed wavefronts using Shack-Hartmann sensors. In 1990, M. Sarazin and F. Roddier have proposed a simple monitor which is a simplified Hartmann test with two apertures. In this case, AA fluctuations integrated on small apertures, with diameters equal to a few centimeters, are simultaneously observed at a distance of a few tens of centimeters. The Fried parameter r_0 is deduced from the measurements of longitudinal and transverse structure functions. If λ is the light wavelength, D_A the diameter of each aperture and d

the distance between them, these functions are expressed respectively as:

$$\mathbf{D}_\alpha(d) = 0.358[1 - 0.541(\frac{d}{D_A})^{-\frac{1}{3}}]\lambda^2 r_0^{-\frac{5}{3}} D_A^{-\frac{1}{3}} \quad (5)$$

and

$$\mathbf{D}_\beta(d) = 0.358[1 - 0.810(\frac{d}{D_A})^{-\frac{1}{3}}]\lambda^2 r_0^{-\frac{5}{3}} D_A^{-\frac{1}{3}} \quad (6)$$

where α and β are the AA components considered in directions respectively parallel and perpendicular to the baseline. More recently, A. Tokovinin (2002) has demonstrated that the DIMM measure Zernike tilts and not image centroids (G tilt) as commonly assumed. This comes from the centroiding methods. Consequently, using series expansions as given by R.J. Sasiela (1994) and limiting the developments lead to :

$$\mathbf{D}_\alpha(d) = 0.364[1 - 0.532(\frac{d}{D_A})^{-\frac{1}{3}} - 0.024(\frac{d}{D_A})^{-\frac{7}{3}}]\lambda^2 r_0^{-\frac{5}{3}} D_A^{-\frac{1}{3}} \quad (7)$$

and

$$\mathbf{D}_\beta(d) = 0.364[1 - 0.798(\frac{d}{D_A})^{-\frac{1}{3}} + 0.018(\frac{d}{D_A})^{-\frac{7}{3}}]\lambda^2 r_0^{-\frac{5}{3}} D_A^{-\frac{1}{3}} \quad (8)$$

One observes very small differences between these coefficients and those given by Sarazin and Roddier (1990). The terms in $(\frac{d}{D_A})^{-\frac{7}{3}}$ may be neglected. So, formulae (5) and (6) may be used to estimate r_0 .

Let us consider the case described in the previous section, where AA fluctuations appear as intensity fluctuations in an image of the pupil formed through a diaphragm positioned on the solar limb. If two small diaphragms, of a few centimeters in diameter, associated to photoelectric sensors are placed on that image with a baseline parallel to the limb, one can obtain an estimation of r_0 from the measurement of the transverse AA structure function. If the baseline is perpendicular to the limb, one can obtain a measurement of the longitudinal AA structure function and another estimation of r_0 may also be deduced. Evidently, the use of a CCD camera extends the potentialities of the experiment allowing measurements according to different baselines with different pupil diameters.

For the estimation of r_0 , 3 circular apertures are considered on pupil images. The diameter of each aperture D_A is, for example, taken equal to $2\Delta d$, where Δd is the size of the smaller structure which may be observed and which is fixed by the filtering performed by the slit (see next section). These sub-apertures

define the two baselines mentioned above.

For the estimation of L_0 , 2 sub-apertures are considered on the pupil image. The diameters of these sub-apertures are respectively, for example, $2\Delta d$ (sub-aperture 1) and $6\Delta d$ (sub-aperture 2). L_0 is deduced from the estimation of variances corresponding to the 2 sub-apertures. In the case of a circular pupil with a diameter D_A and if the wavelength is λ , the variance of AA fluctuations considered in one direction may be written, if the turbulent phenomena are described by the von Kàrmàn model, as (Borgnino et al. 1992) :

$$\sigma_{D_A}^2 = 0.0228\pi\lambda^2 r_0^{-\frac{5}{3}} \int_0^{+\infty} df f^3 (f^2 + \frac{1}{L_0^2})^{-\frac{11}{6}} (2 \frac{J_1(\pi D_A f)}{\pi D_A f})^2 \quad (9)$$

where f is the modulus of the spatial frequency and J_1 the Bessel function of first kind and first order. In addition, it has been assumed the near-field hypothesis and that the inner scale l_0 was equal to 0. When the outer scale L_0 is much larger than the telescope diameter (here D_A), one can obtain by integration (Ziad et al. 1994) :

$$\sigma_{D_A}^2 = 0.17\lambda^2 r_0^{-\frac{5}{3}} [D_A^{-\frac{1}{3}} - 1.525L_0^{-\frac{1}{3}}] \quad (10)$$

Using on the pupil image, sub-apertures of diameters D_{A1} and D_{A2} notably different, the outer scale may be deduced from the following ratio R without the knowledge of r_0 .

$$R = \frac{\sigma_{A1}^2 - \sigma_{A2}^2}{\sigma_{A1}^2} = \frac{D_{A1}^{-\frac{1}{3}} - D_{A2}^{-\frac{1}{3}}}{D_{A1}^{-\frac{1}{3}} - 1.525L_0^{-\frac{1}{3}}} \quad (11)$$

The problem induced by eventual vibrations will be discussed in the following section.

Results

To test the method, series of images like those shown on Figure 2 have been processed to deduce r_0 and L_0 . First results have been obtained by numerical simulation and require to be closely connected. For the moment, a rather good agreement appears between results obtained from fluctuations $\beta(x, y)$ directly observed in the pupil plane and those obtained on intensity fluctuations in the images of the pupil observed through the slit placed on the solar limb image at the telescope focus. For r_0 , estimates were deduced from longitudinal and transverse differential variances (sub-apertures of 4cm separated from 17cm). For L_0 , estimates were deduced from variances calculated for sub-apertures with diameters

equal to 4 and 12cm. They show a notable sensitivity to the variations of the ratio R (expression 11). A study of the diameter values which must be given to the sub-apertures in order to obtain more robust results will be developed.

2.3 Some effects to take into account

The shape of the extreme limb of the Sun plays an important role in the obtention of AA fluctuations. To study this effect one will use the model given by Hestroffer and Magnan where the intensity normalized by the intensity at the center is :

$$I(\alpha) = [1 - (\frac{\alpha}{R_S})^2]^{\frac{a(\lambda)}{2}} \quad (12)$$

where α is the angular distance to the center of the Sun. In the following, α and R_S (Sun radius) are expressed in arcseconds. Related to the wavelength, $a(\lambda)$ is an exponent which can be found in a table (Hestroffer et al. 1998).

In order to precise the problem, the intensity distribution of a solar limb cut may be developed at the order 2 allowing to estimate the deviation to AA fluctuations (Appendix). But, the non-linear effect introduced by the solar-limb darkening may be evaluated comparing intensity fluctuations in pupil images when the solar limb luminance distribution is assumed to vary linearly and when it is described by the Hestroffer and Magnan model (see Figures 4 and 5).

In addition, the thin slit performs two types of filtering. The first one is due to diffraction and the second one is due to an angular integration varying linearly with altitude. This last filtering introduces anisoplanatism.

In the following, Δd notes the size of the smaller structure which may be observed on the wavefront, indeed here on the map of $\beta(x, y)$ inside pupil images. If $\Delta\theta$ is the angular width of the slit and λ the wavelength the diffraction effect leads to :

$$\Delta d = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad (13)$$

Taking into account the angular filtering and if h notes the altitude of the atmospheric turbulence, this filtering is expressed by :

$$\Delta d = h\Delta\theta \quad (14)$$

For the implementation of the profiler (see below) and for a given wavelength, the width of the slit will be chosen in such way that the filtering be imposed by diffraction (and not by angular filtering) until h_{max} , maximum sensing altitude. This value of $\Delta\theta$ may be obtained equaling the two expressions of Δd given by (13) and (14). This leads to $(\Delta\theta)^2 = \frac{\lambda}{h_{max}}$.

As an example, for $\Delta\theta$ equal to 6 arcseconds and a wavelength equal to 468nm, the filtering due to diffraction leads to (expression 13) $\Delta d = 1.56cm$. This filtering will be predominant until an altitude (expression 14) equal to 520m. Above this altitude, it is the angular filtering which becomes predominant.

Another problem to take into account is that related to eventual scintillation effects. If the atmospheric turbulence is assumed to be developed in several layers, it is possible to study the phenomenon theoretically as well as by numerical simulation. The study of scintillation effects, introducing amplitude fluctuations in $W(\vec{r})$ will be not developed in this paper. A statistical analysis of the intensity fluctuations observed in the pupil images will be also necessary.

The method used to estimate L_0 is not differential and will be affected by telescope vibrations which are of different origins: tracking, wind, eventually astronomer activities around and near the experiment..... Studies of the effects of these eventual vibrations have been performed in the framework of High Angular Resolution techniques (Adaptive Optics and Interferometry) (Tokovinin 2000, Altarac et al. 2001, Cl  net et al. 2004). Wilson et al. 1999 have more particularly studied the effects of vibrations due to the tracking system of the 4.2m William Herschel Telescope at La Palma. In our case, as a first step, in order to minimize the effects of vibrations, the slit on the solar limb will be placed with its greater dimension perpendicular to the tracking direction. Vibrations in this direction will have no effect on $\beta(x,y)$ measurements. Moreover, wind screens (special nets) will be systematically used during observations. A deeper study of this problem will be developed soon.

3 An optical turbulence profiler

3.1 Principle :a triangulation method

The method consists to observe simultaneously the telescope pupil through two diaphragms (thin slits with a width equal to a few arcseconds) what will allow us to calculate spatio-angular correlations. The experimental device is presented on Figure 6. The two slits of width equal to $\Delta\theta$ are separated by an angular distance θ . One must observe a decrease of the correlations when θ increases. This is due to the fact that the atmospheric layers traversed by the wavefronts are the more different as θ becomes larger. The concept is similar to the SLODAR-one when two stars are simultaneously observed using a Shack-Hartmann sensor (Wilson 2002, Butterley et al. 2006).

3.2 Theory : spatio-angular covariance of $\beta(x, y)$

Here, x and y are considered in directions respectively parallel and perpendicular to the solar limb. One calculates now the theoretical expression of the transverse covariance $\Gamma_{\beta,\theta}(b)$ where b notes the baseline considered parallel to the x-axis as well as the angular directions in the sky. With this hypothesis, the problem may be treated at one dimension. The procedure is strictly similar to the one used by Avila et al. (1997) in the case of the theoretical spatio-temporal analysis of AA fluctuations. The Fresnel diffraction will be neglected.

Let $\beta(x, t, \eta)$ fluctuations of the AA transverse component observed at the position x of the perturbed wavefront, at the time t and in the angular direction η . When the observations are performed simultaneously in two angular directions η and $\eta + \theta$, the spatio-angular covariance of these fluctuations for two positions separated by a baseline b is :

$$\Gamma_{\beta,\theta}(b) = \langle \beta(x, t, \eta) \beta(x + b, t, \eta + \theta) \rangle \quad (15)$$

where $\langle \rangle$ symbolizes an ensemble average.

One considers now an unique turbulent layer at an altitude h. The β fluctuations observed in the angular direction $\eta + \theta$ may be described by :

$$\beta(x + b, t, \eta + \theta) = \beta(x + b - \theta h, t, \eta) \quad (16)$$

and the spatio-angular covariance is related to the spatial covariance by :

$$\Gamma_{\beta, \theta}(b) = \Gamma_{\beta}(\theta h - b) \quad (17)$$

Using the von Kàrmàn model and assuming that the wavefront inner scale l_0 is equal to 0 leads to the expression of the transverse spatio-angular covariance (Avila et al. 1997) :

$$\Gamma_{\beta, \theta}(b) = 0.0716 \times \lambda^2 r_0^{-\frac{5}{3}} \int_0^{+\infty} df f^3 (f^2 + \frac{1}{L_0^2})^{-\frac{11}{6}} [J_0(2\pi f(\theta h - b)) + J_2(2\pi f(\theta h - b))] \quad (2 \frac{J_1(\pi D_A f)}{\pi D_A f})^2 \quad (18)$$

D_A is the diameter of a circular sub-aperture in the pupil images. It will be chosen equal to Δd , size of the smaller structure imposed by the slit filtering.

The spatial and angular covariances are obtained doing respectively $\theta = 0$ and $b=0$ in this expression.

In the case of a multi-layer turbulence, the above covariance may be rewritten as :

$$\Gamma_{\beta, \theta}(b) = 1.193 \times \int_0^{+\infty} dh C_n^2(h) \int_0^{+\infty} df f^3 (f^2 + \frac{1}{(L_0(h))^2})^{-\frac{11}{6}} [J_0(2\pi f(\theta h - b)) + J_2(2\pi f(\theta h - b))] (2 \frac{J_1(\pi D_A f)}{\pi D_A f})^2 \quad (19)$$

where $C_n^2(h)$ is the optical turbulence energy profile and $L_0(h)$ is the spatial coherence outer scale profile.

Assuming that the spatial coherence outer scale is constant according to altitude, i.e. $L_0(h) = L_0$, one defines now the function :

$$F_{\theta}(h) = 1.193 \int_0^{+\infty} df f^3 (f^2 + \frac{1}{(L_0)^2})^{-\frac{11}{6}} [J_0(2\pi f\theta h) + J_2(2\pi f\theta h)] \quad (2 \frac{J_1(\pi D_A f)}{\pi D_A f})^2 \quad (20)$$

The vertical cross-correlation is related to the function $F_{\theta}(h)$ by the following convolution product :

$$\mathbf{C}\mathbf{C}_{\theta}(h) = \int_0^{+\infty} dz C_n^2(z) F_{\theta}(h - z) = C_n^2(h) \star F_{\theta}(h) \quad (21)$$

Using the relation $\rho = \theta h$ allows to project this convolution product on the telescope pupil under the form :

$$\mathbf{CC}_\theta(\rho) = C_n^2(\rho) \star F_\theta(\rho) \quad (22)$$

The maximum sensing altitude is given by the telescope diameter D_T and the angular separation θ :

$$\mathbf{h}_{\max} = \frac{D_T}{\theta} \quad (23)$$

For example, in the case of a telescope diameter equal to 30 cm (case of a transportable profiler), if $\theta = 30 \text{arcseconds}$, \mathbf{h}_{\max} will be equal to 2000m, and if $\theta = 120 \text{arcseconds}$, \mathbf{h}_{\max} will be equal to 500m. One can give in this two cases the slit width which leads to a filtering imposed by diffraction until the altitude \mathbf{h}_{\max} . For a turbulence until $\mathbf{h}_{\max} = 2000m$ the smaller structure, imposed by diffraction, observed in the pupil image is 3.2cm, which corresponds to a slit with a width equal to 3 arcseconds. For a turbulence until $\mathbf{h}_{\max} = 500m$ this structure is 1.58cm which corresponds to a slit width equal to 6.3 arcseconds.

4 Theoretical results and numerical simulations

4.1 Case of an unique turbulent layer

The atmospheric turbulence is supposed to be localized in a layer at the altitude $h_0 = 500m$. In this case, expression (21) leads to :

$$\mathbf{CC}_\theta(h) = F_\theta(h - h_0) = F_\theta(h - 500) \quad (24)$$

The von Kàrmàn model is assumed and at ground level the spatial properties of perturbed wavefronts are characterized by $r_0 = 4cm$ and $L_0 = 10m$. The telescope diameter is $D_T = 30cm$. The two slits on the solar limb have a width equal to 3 arcseconds and are separated by 30 arcseconds. The maximum sensing altitude is $\mathbf{h}_{\max} = 2000m$. The filtering due to diffraction is predominant until this altitude. Firstly, one presents on Figure 7 the result of the integration of expression (18) in the case described just above

(curve b). The spatial covariance obtained doing $\theta = 0$ is also drawn on the figure (curve a).

One gives then (Figure 8) the result of a numerical simulation (Berdja et al. 2004) with the same turbulence conditions and slits having a width equal to 6 arcseconds. Identical structures (*Solar Flying Shadows*) appear shifted in the direction parallel to the solar limb by $\rho_0 = \theta h_0 = 7.5cm$ in one image by comparison to the other.

4.2 Case of 2 turbulent layers

Here, the atmospheric turbulence appears localized in 2 layers at the altitudes $h_1 = 250m$ and $h_2 = 750m$.

In this case, expression (21) leads to :

$$CC_\theta(h) = F_\theta(h - 250) + F_\theta(h - 750) \quad (25)$$

The conditions for the wavefront observed at ground level are the same that those of the previous case. The angular separation between the two slits is $\theta = 180arcseconds$. On Figure 9 is presented the spatio-angular covariance (cross-correlation) of AA fluctuations (curve a) as obtained by integration of expression (19). The Fried parameter r_0 at ground level is equal to 4cm. L_0 is assumed to be the same for the two layers and $C_n^2(h_1) = 3C_n^2(h_2)$. The spatio-angular covariance corresponding to each layer is also presented (curves b and c). The Figure 10 shows the result of a numerical simulation with the same conditions and $C_n^2(h_1) = C_n^2(h_2)$. In the two images the same structures are shifted in one image by comparison to the other of 22.5cm and 67.5cm respectively to the layers at the altitudes h_1 and h_2 .

One can note here that, with $\theta = 180arcseconds$, it is not possible to observe the contributions of the two layers if the telescope is too small ($D_T = 30cm$), the maximum sensing altitude being in this case $h_{max} = 333m$. To observe the contributions of the two layers localized at $h_1 = 250m$ and $h_2 = 750m$, with the same angular separation between the two slits, it is necessary to use a telescope with a diameter equal to 1m (see Figure 9). In this case, $h_{max} = 1000m$.

5 Conclusion

The principle of an optical turbulence profiler has been presented and its potentialities discussed. By observation of the solar limb it allows to obtain simultaneous maps of a component of the angle of arrival

corresponding to different angular directions in the sky. A triangulation method allows to deduce profiles of the optical turbulence energy ($C_n^2(h)$). This principle appears very near the one of the SLODAR. However, a high altitude resolution may be expected, because the angular distance between the diaphragms on the image limb at the telescope focus may be chosen as large as one want. In the case presented on Figure 9, this resolution is of the order of 150m. For the lower atmosphere, a higher resolution may be obtained increasing the separation between the slits positioned on the solar limb image. Analyzing images corresponding to a given angular direction allows to deduce estimations of the spatial coherence parameters, Fried's parameter r_0 and spatial coherence outer scale L_0 . In addition, spatiotemporal analysis may be also performed, as it is done using SLODAR (Wilson 2002, Butterley et al. 2006).

In the future, in order to model more precisely the turbulence altitude distribution, it would be interesting to couple this monitor with an outer scale profiler, to implement for daytime conditions and which already exists (MOSP Maire 2007) for nighttime conditions (observation of the lunar limb). Finally, it could be developed using 4 thin slits in non-redundant angular positions in order to obtain simultaneously 6 angular baselines and thus 6 different maximum sensing altitudes and 6 different altitude resolutions.

Intensity fluctuations in the pupil image

First order approximation

In the body of this paper, it was seen (expression (3)) that intensity fluctuations observed in the pupil image are function of the Fourier transform $\widehat{O}(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}''}{\lambda})$ of the object intensity distribution, i.e. a radial cut of the solar limb. In this appendix, it is considered that this distribution may be developed at the first order as :

$$O(\alpha) = a_0 + a_1\alpha \quad (26)$$

in which α is an angular direction in the sky.

The corresponding Fourier transform is given by :

$$\widehat{O}(\frac{x' - x''}{\lambda}, \frac{y' - y''}{\lambda}) = a_0 \delta(\frac{x' - x''}{\lambda}) \delta(\frac{y' - y''}{\lambda}) - (\frac{a_1}{2i\pi}) \delta(\frac{x' - x''}{\lambda}) \delta_y^{(1)}(\frac{y' - y''}{\lambda}) \quad (27)$$

in which, (x', y') and (x'', y'') are respectively the components of \mathbf{r}' and \mathbf{r}'' , δ is the Dirac distribution and $\delta_y^{(1)}$ notes the first derivative of δ according to the variable y which is considered perpendicularly to the solar limb. The expression (A2) defines a distribution which must be applied to the function $(\widehat{tt^*PPWW^*})$ which appears in the integral of expression (3) (Bracewell 1978). The first term of (A2) leads to a term of continuous. The second term leads by derivation of W^* to 3 terms, one of continuous, a second which expresses edge effects (derivative of P) and a third which fluctuates and is the term of interest. To obtain this fluctuating term, one expresses the components of the vectors \mathbf{r} , \mathbf{r}' and \mathbf{r}'' , then one carries out the changes of variables: $\frac{x}{\lambda} = u$; $\frac{x'}{\lambda} = u'$; $\frac{x''}{\lambda} = u''$; $\frac{y}{\lambda} = v$; $\frac{y'}{\lambda} = v'$; $\frac{y''}{\lambda} = v''$, and also $v' - v'' = w$.

After that, applying the distribution leads to the fluctuating term:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(\lambda u, \lambda v) = & \frac{a_1 \lambda^4}{2i\pi} \frac{f_T^2}{f_L^2} \int \int du' dv' dw \delta(w) \widehat{t}(\frac{u - u'}{f_L}, \frac{v - v'}{f_L}) \widehat{t^*}(\frac{u - u'}{f_L}, \frac{v - v' + w}{f_L}) \\ & P(-\lambda u' \frac{f_T}{f_L}, -\lambda v' \frac{f_T}{f_L}) P(-\lambda u' \frac{f_T}{f_L}, -\lambda(v' - w) \frac{f_T}{f_L}) \\ & W(-\lambda u' \frac{f_T}{f_L}, -\lambda v' \frac{f_T}{f_L}) [W^*(-\lambda u' \frac{f_T}{f_L}, -\lambda v' \frac{f_T}{f_L})]_w^{(1)} \end{aligned} \quad (28)$$

where $[\dots]_w^{(1)}$ notes the first order derivative of the function according to the variable w . Performing this derivation, returning to the first variables (x, x', x'', y, y', y'') and introducing the component of the angle of arrival given by :

$$\beta(-x \frac{f_T}{f_L}, -y \frac{f_T}{f_L}) = -\frac{\lambda}{2\pi} \varphi_y^{(1)}(-x \frac{f_T}{f_L}, -y \frac{f_T}{f_L}) \quad (29)$$

leads to the final convolution product (expression 4) :

$$\tilde{I}_1(x, y) = a_1 \frac{f_T}{f_L} [\frac{\lambda f_T}{f_L}]^2 |\hat{t}(\frac{x}{\lambda f_L}, \frac{y}{\lambda f_L})|^2 * P(-x \frac{f_T}{f_L}, -y \frac{f_T}{f_L}) \beta(-x \frac{f_T}{f_L}, -y \frac{f_T}{f_L}) \quad (30)$$

Non-linear effects due to the solar-limb darkening

To evaluate this effects, a first approach similar to the one presented above consists to develop the intensity distribution $O(\alpha)$, given for example by the Hestroffer and Magnan model, at the order 2, neglecting the terms of higher orders. A term $a_2 \alpha^2$ must be added to $O(\alpha)$ (expression A1), to which corresponds the Fourier transform :

$$-(\frac{a_2}{4\pi^2}) \delta(\frac{x' - x''}{\lambda}) \delta_y^{(2)}(\frac{y' - y''}{\lambda}) \quad (31)$$

distribution which must be added to $\hat{\mathbf{O}}(\frac{x' - x''}{\lambda}, \frac{y' - y''}{\lambda})$ (expression A2). This leads to a new integral $I_2(x, y)$ when expression (3) is developed. The application of this distribution gives 9 terms of which 5 express edge effects and 1 is a term of continuous. It remains 3 fluctuating terms which recombined give in equation (4) a new term proportional to $[\beta(-\mathbf{r} \frac{f_T}{f_L})]^2$. At this order the influence of the non-linearity may be evaluated, but the calculation is already heavy. The calculation becomes more and more complicated when the order of the development increases. However, the weight of the additive terms decreases quickly with this order. The study at the second order gives a good approximation of the non-linear effects.

References

- [1] Altarac S., Berlio-z-Arthaud P., Thiébaud E., Foy R., Balega Y.Y., Dainty J.C., Fuensalida J.J., 2001, Effect of telescope vibrations upon high angular resolution imaging, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **322**, p. 141-148
- [2] Avila R., Vernin J., Masciadri E., 1997, Whole atmospheric-turbulence profiling with generalized scidar, *Appl. Opt.*, **36**, p. 7898-7905
- [3] Avila R., Ziad A., Borgnino J., Martin F., Agabi A., Tokovinin A., 1997, Theoretical spatiotemporal analysis of angle of arrival induced by atmospheric turbulence as observed with the grating scale monitor experiment, *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, p. 3070-3082
- [4] Avila R., Chun M.R., 1997, A method for high-resolution C_n^2 profiling in the first few hundred meters, **Advancements in Adaptive Optics**. Edited by Domenico B. Calia, Brent L. Ellerbroek and Roberto Ragazzoni. Proceedings of the SPIE, **5490**, p. 742-748
- [5] Beckers J., 2001, A Seeing Monitor for Solar and Other Extended Object Observations, *Experimental Astronomy*, **12**, p. 1-20
- [6] Beckers J., 2002, Daytime seeing measurements for the advanced technology Solar telescope, *Astronomical Site Evaluation in the Visible and Radio Range*. ASP Conference Proceedings, Astronomical Society of the Pacific, **266**, p. 350
- [7] Berdja A., Irbah A., Borgnino J., Martin F., 2004, Simulnation of pupil-plane observation of angle-of-arrival fluctuations in daytime turbulence, in *Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems VI*, edited by John D. Gonglewski and Karin Stein, Proceedings of SPIE Vol. **5237** (SPIE, Bellingham, WA, 2004), p. 238-248
- [8] Borgnino J., Martin F., 1977, Statistical analysis of wavefront random deformation produced by atmospheric turbulence near the ground. I. Description of the method. First results, **in French**, *J. Optics (Paris)*, **8**, p. 319-326
- [9] Borgnino J., Martin F., 1977, Correlation between angle-of-arrival fluctuations on the entrance pupil of a solar telescope, *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, p. 1065-1072

- [10] Borgnino J., Vernin J., 1978, Experimental verification of the inertial model of atmospheric turbulence from solar limb motion, *J. Opt. Soc. Am.*, **68**, p. 1056-1062
- [11] Borgnino J., Martin F., Ziad A., 1992, Effect of a finite spatial-coherence outer scale on the covariances of angle-of-arrival fluctuations, *Optics Communications*, **91**, p. 267-279
- [12] Bracewell R.N., 1978, *The Fourier Transform and its Applications*, Mc Graw-Hill Book Company , New York
- [13] Butterley T., Wilson R.W., Sarazin M., 2006, Determination of the profile of atmospheric optical turbulence strength from SLODAR data, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **369**, p. 835-845
- [14] Clénet Y., Kasper M., Ageorges N., Lidman C., Fusco T., Marco O.P., Hartung M., Mouillet D., Koehler B., Rousset G., Hubin N., 2004, NAOS performances: impact of the telescope vibrations and possible origins, SF2A-2004 : Semaine de l'Astrophysique Française, meeting held in Paris, France, June 14-18, 2004. Edited by F. Combes, D. Barret, T. Contini, F. Meynadier and L. Pagani. Published by EDP-Sciences, Conferences Series, p. 179-
- [15] Hestroffer D., Magnan C., 1998, Wavelength dependency on the Solar limb darkening, *Astron. and Astrophys.*, **333**, p.338-342
- [16] Johnston R.A., Dainty C., Woodey N.J., Lane R.G., 2002, Generalized scintillation detection and ranging results obtained by use of a modified inversion technique, *Appl. Opt.*, **41**, p. 6768-6772
- [17] Kornilov V., Tokovinin A.A., Vozyakova O., Zaitsev A., Shatsky N., Potanin S.F., Sarazin M., 2003, MASS : a monitor of the vertical turbulence distribution, *S.P.I.E.*, **4839**, p.837-845
- [18] Maire J., Ziad A., Borgnino J., Martin F., 2007, Measurements of wavefront outer scale profiles from Moon's limb observations, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **377**, p. 1236-1244
- [19] Sarazin M., Roddier F., 1990, The ESO differential image motion monitor, *Astron. and Astrophys.*, **227**, p. 294-300
- [20] Sasiela R.J., 1994, *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence. Evaluation and Application of Mellin Transforms*, Springer-Verlag, New-York

- [21] Tokovinin A., 2000, Pendular seismometer for correcting telescope vibrations, Mon. Not. R. Astron. Soc., **316**, p. 637-641
- [22] Tokovinin A.A., Kornilov V., Shatsky N., Vozyakova O., 2003, Restoration of turbulence profile from scintillation indices, Mon. Not. R. Astron. Soc. ,**343**, p. 891-899
- [23] Tokovinin A., 2007, Turbulence profiles from the scintillation of stars, planets, and Moon, Proceedings of the Workshop on astronomical site evaluation, San Pedro Martir. *To be published in Rev. Mex. Astron. Astrof. (Conf. Series).*
- [24] Wilson R.W., O'Mahony N., Packman C., Azzaro M., 1999, The seeing at the William Herschel Telescope, Mon. Not. R. Astron. Soc., **309**, p. 379-387
- [25] Wilson R.W., 2002, Slodar : measuring optical turbulence altitude with a Shack-Hartmann wavefront sensor, Mon. Not. R. Astron. Soc., **337**, p. 103-108
- [26] Ziad A., Borgnino J., Martin F., Agabi A., 1994, Experimental estimation of the spatial coherence outer scale from a wavefront statistical analysis, Astron. and Astrophys. 282, p. 1021-1033

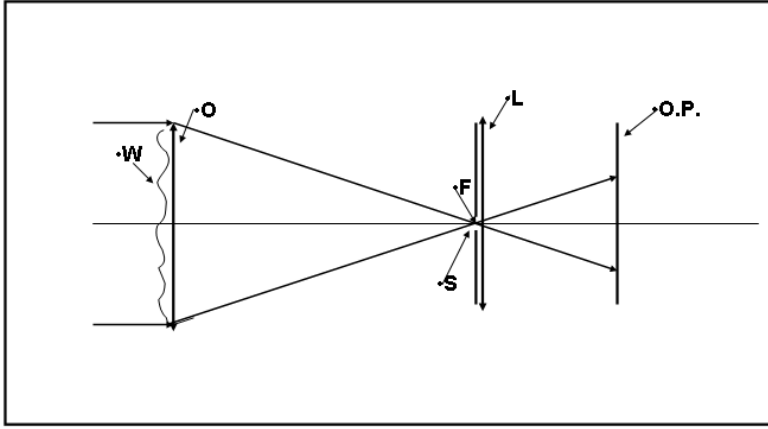


Figure 1: Principle of the wavefront analysis. W notes the perturbed wavefront complex amplitude. O symbolizes a telescope with a focal length f_T . S is a thin slit (the width is equal to a few arcseconds) placed on the solar limb image. F is the telescope focus. L is a lens with a focal length equal to f_L . $O.P.$ is the observation plane where is formed the pupil image.

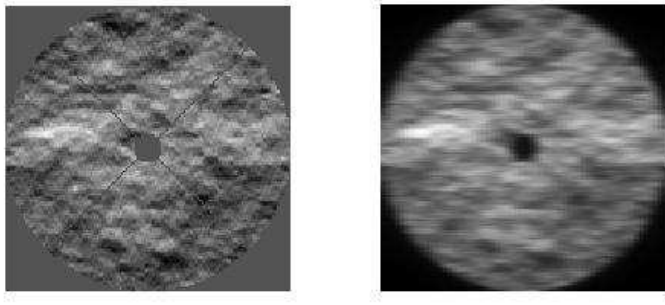


Figure 2: Comparison of the AA component $\beta(x, y)$ observed directly on the pupil (left) and on the pupil image (right). The von Kàrmàn model is assumed for a wavefront at ground level with the Fried parameter $r_0=4\text{cm}$, the spatial coherence outer scale $L_0=10\text{m}$ and the telescope diameter D_T equal to 30cm. The width of the slit has been taken here equal to 6 arcseconds.

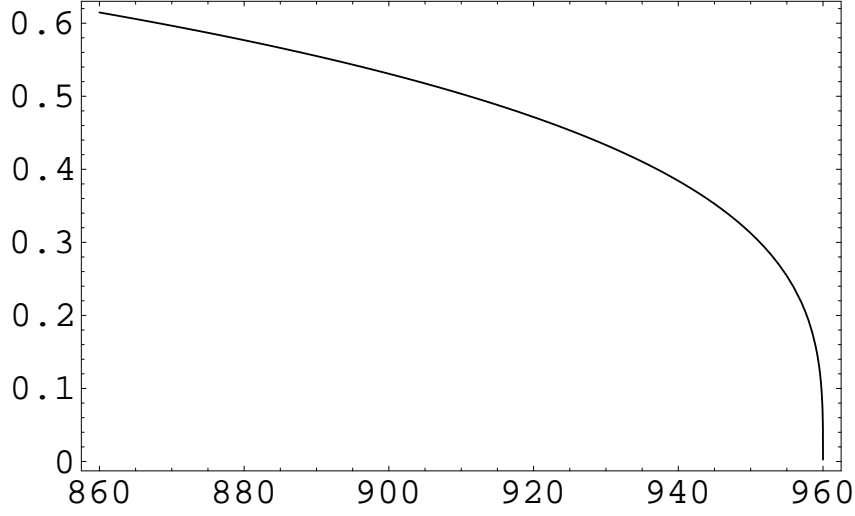


Figure 3: Solar limb-darkening function following Hestroffer and Magnan. x-axis : angular distance to the center of the Sun in arcseconds. y-axis : intensity normalized by the intensity at the center. The wavelength of the light is $\lambda = 468nm$. The Sun radius R_S has been taken equal to 960 arcseconds.

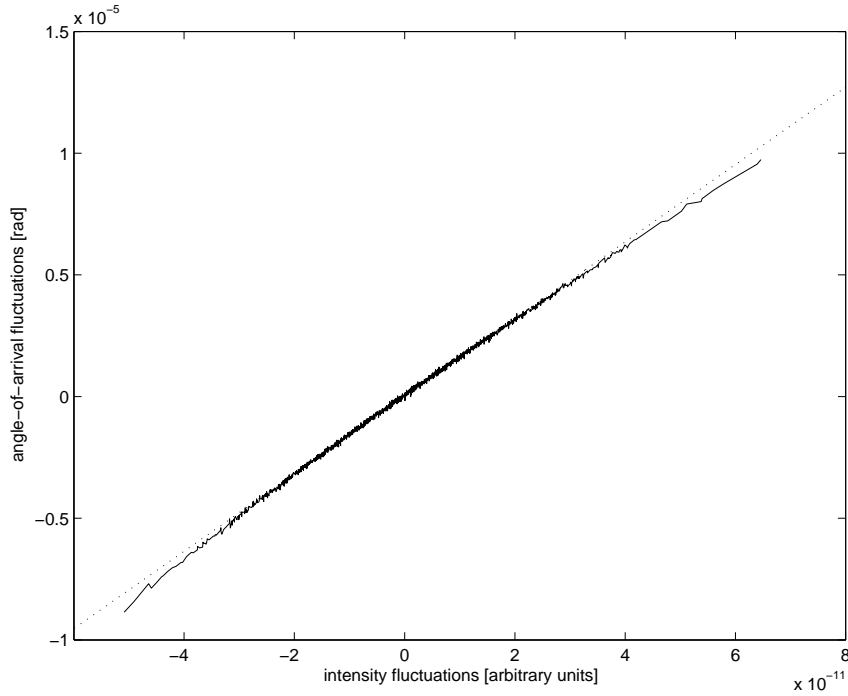


Figure 4: Calibration : AA fluctuations according to intensity fluctuations with a sub-aperture of diameter equal to 12cm

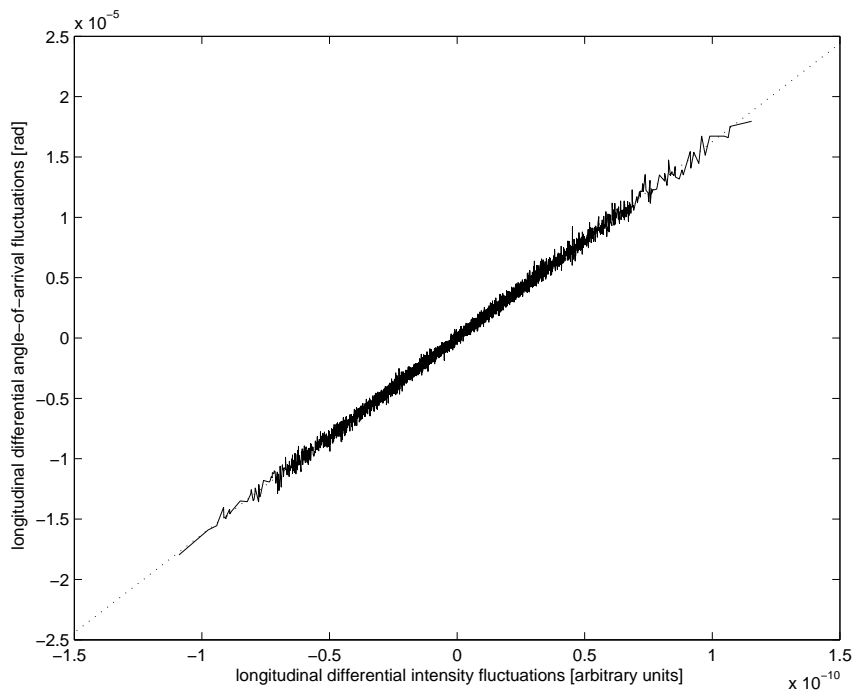


Figure 5: Calibration : Differential AA fluctuations according to differential intensity fluctuations

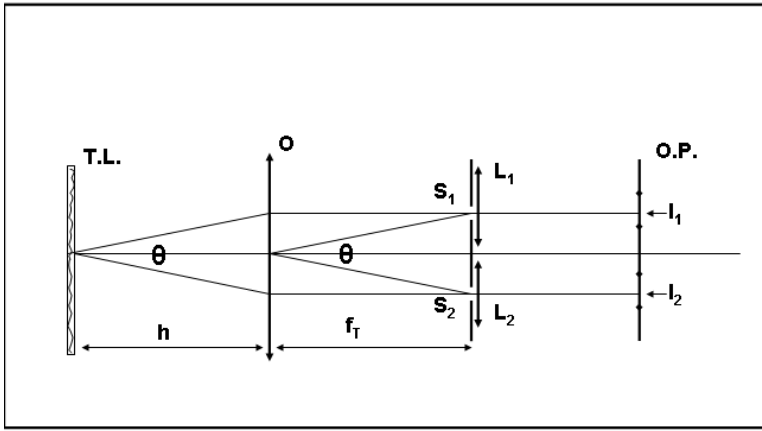


Figure 6: Optical Turbulence Profiler : principle. A solar limb image is formed at the focus of the telescope symbolized by O. f_T is the focal length of this telescope. A turbulent layer T.L. is localized at the altitude h . Two thin slits S_1 and S_2 with a width of a few arcseconds are placed on the solar limb image at an angular separation θ which may vary from ten up to several hundred arcseconds. Two lenses L_1 and L_2 allow to obtain simultaneously in the observation plane O.P. two pupil images corresponding to 2 angular directions .

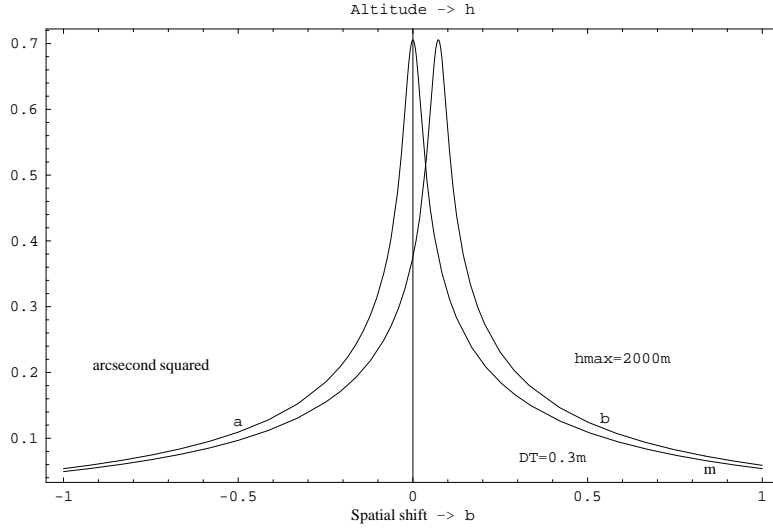


Figure 7: Theoretical results. The von Kàrmàn model is assumed with $r_0=4\text{cm}$ and $L_0 = 10\text{m}$. *Curve a* : *Spatial covariance of AA fluctuations*. *Curve b* : *Spatio-angular covariance of AA fluctuations observed in the two pupil images when the angular separation between the 2 slits is $\theta = 30\text{arcseconds}$. An unique turbulent layer is localized at an altitude $h = 500\text{m}$. The filtering due to diffraction is supposed to be predominant until $h_{\text{max}} = 2000\text{m}$ (see section 2-c).*

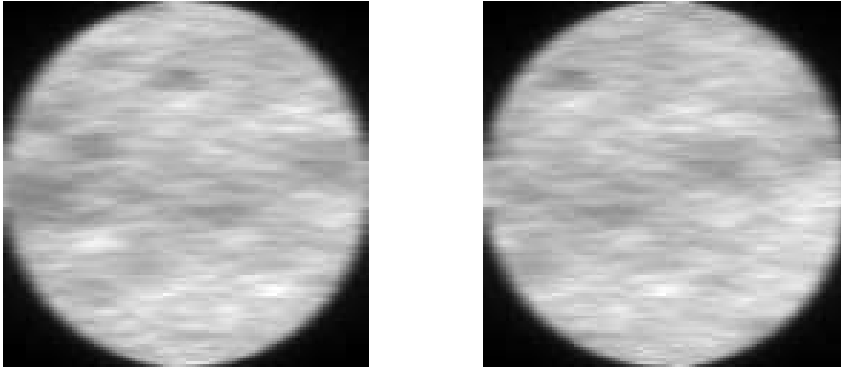


Figure 8: Result of a numerical simulation for $\theta = 30\text{arcseconds}$. The altitude of the turbulent layer is $h = 500\text{m}$. The von Kàrmàn model is assumed with $r_0=4\text{cm}$, $L_0 = 10\text{m}$. The telescope diameter is $D_T = 30\text{cm}$. The width of the slits is 6 arcseconds. The maximum sensing altitude is $h_{\text{max}} = 2000\text{m}$. One observes identical structures shifted from one image to the other by 7.5cm.

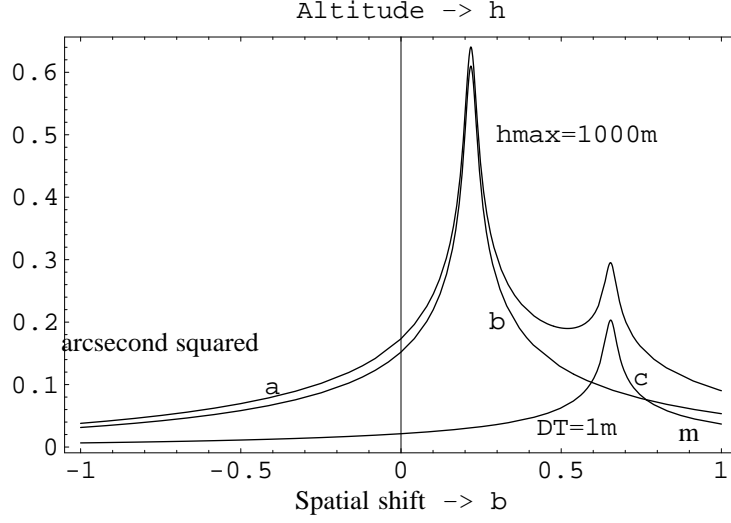


Figure 9: Theoretical results : Spatio-angular covariances of AA fluctuations in the cases of : a - two layers localized at the altitudes $h_1 = 250m$ and $h_2 = 750m$, b - the layer localized at the altitude h_1 , c - the layer localized at the altitude h_2 . The von Kàrmàn model is assumed. The Fried parameter r_0 observed at ground level is equal to 4cm. The spatial coherence outer scale L_0 is assumed to be equal to 10m and to be the same for the two layers. The optical turbulence energies are related by $C_n^2(h_1) = 3C_n^2(h_2)$. The two slits are separated by $\theta = 180arcseconds$. In this case, the observation of the contributions of the two layers needs to use a telescope larger than previously. Here, $D_T = 1m$ which leads to $h_{max} = 1000m$.

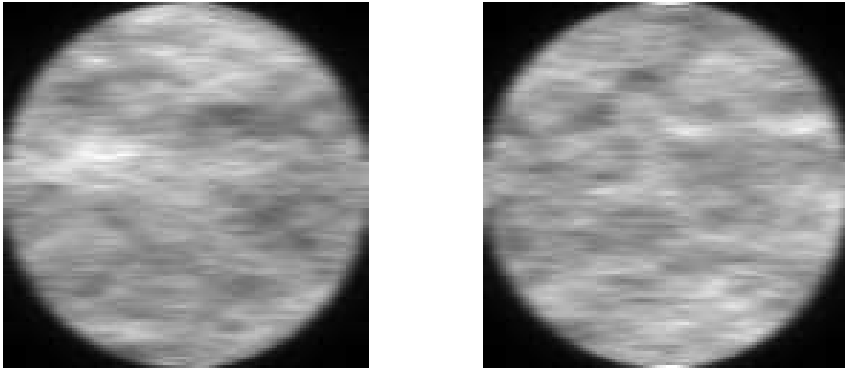


Figure 10: Result of a numerical simulation for $\theta = 180 \text{ arcseconds}$. The altitudes of the turbulent layers are $h_1 = 250m$ and $h_3 = 750m$. The von Kàrmàn model is assumed with r_0 observed at ground level equal to 4cm. The optical turbulence energy $C_n^2(h)$ and the spatial coherence outer scale $L_0 = 10m$ are supposed to be the same for the 2 layers. The telescope diameter is $D_T = 30cm$. The width of the slits is 6 arcseconds. The maximum sensing altitude is $h_{max} = 333m$.

4.3.7 Effets de la finesse de la fente

L'effet d'une fente fine, en dehors de celui de conditionner l'anisoplanétisme en largeur, peut être qualitativement décrit selon deux effets. Si on considère le point de vue de la formation de l'image de la pupille d'entrée à travers la fente, cette dernière introduit une diminution en résolution. Il s'ensuit un filtrage spatial latéral des structures de variations d'intensité dans l'image plan-pupille qui est d'autant important que la fente est fine [19, 16]. Cet effet ne dépend que de la largeur de la fente w_y (et de la longueur d'onde λ) et ne dépend pas des hauteurs des couches turbulentes. Dans la modélisation de l'observable on préférera plutôt ce filtrage à celui introduit par l'anisoplanétisme non-local.

L'autre effet découle du fait que la fente est faite de deux masques parallèles qui introduisent un filtrage sur les ASFs qui sont partiellement masquées par l'un des deux côtés ou par les deux à la fois, ce qui introduit des variations d'intensité supplémentaires.

On considère que l'on est dans le cas d'un isoplanétisme local. Si la largeur de la fente est supérieure à θ_{seeing} alors les ASFs sont masquées ou par un bord ou par le bord opposé de la fente. Si en plus on reste dans un domaine où la largeur de la fente est inférieure à l'angle d'isoplanétisme, alors les fluctuations d'intensité issues des bords opposées de la fente dans l'image plan-pupille se compensent et leur effet combiné n'introduit pas de variations d'intensité supplémentaires. Si la largeur de la fente est inférieure à l'angle de *seeing* alors on aura forcément des fluctuations d'intensité supplémentaires qui vont apparaître.

La situation la plus confortable est que la largeur de la fente soit légèrement plus large que l'angle de *seeing* et plus petite que l'angle isoplanétique. Cette situation requiert forcément un isoplanétisme local qui de toute façon est celui qui garantit que les variations d'intensité dans le plan pupille correspondent aux fluctuations d'angle d'arrivée dans la pupille.

4.3.8 Effet de la scintillation

Dans le cas d'isoplanétisme local, Les perturbations du champ complexe au niveau de la pupille d'entrée du télescope ne dépend pas de l'angle d'incidence $\vec{\theta}_0$. On peut donc écrire

$$\Psi(\vec{R}) = \exp \left\{ \chi(\vec{R}) + i\varphi(\vec{R}) \right\} \quad (4.14)$$

où $\chi(\vec{R})$ et $\varphi(\vec{R})$ sont respectivement les fluctuations de la log-amplitude et de la phase au niveau de la pupille d'entrée ramenées au référentiel de l'image plan-pupille à la sortie de l'instrument.

Dans le cas de l'approximation du champ proche où toute la turbulence atmosphérique est concentrée tout près de l'instrument et où on peut considérer que $h = 0$, alors l'image plan-pupille à travers une fente dans le cas d'un éclairage par un objet étendu tel que le bord solaire peut s'écrire

$$I_{pp}(\vec{R}) \propto C_1 + C_2 F(\vec{R}) \otimes \frac{\partial \varphi(\vec{R})}{\partial x} \quad (4.15)$$

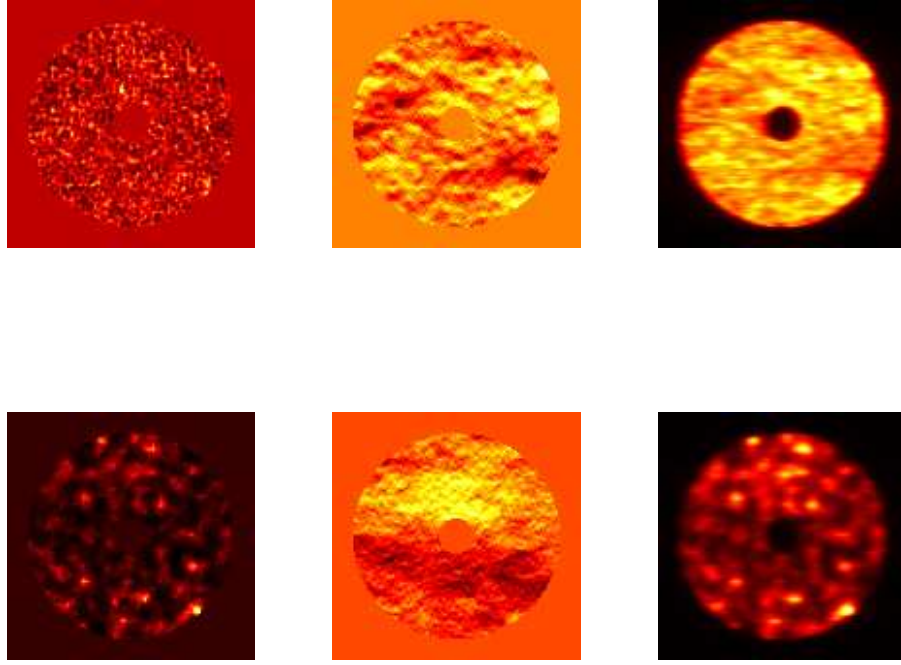


FIG. 4.6 – Dans cette figure la première colonne montre les variations d'intensité (scintillation) à l'entrée du télescope. La deuxième colonne montre les fluctuations d'angle d'arrivée à l'entrée du télescope et la troisième colonne montre l'image plan-pupille obtenue dans chaque cas avec une fente au plan focal du télescope. La différence entre la première ligne et la deuxième est que dans la première ligne $h=100$ m (approximation du champ proche) et que dans la seconde $h=1000$ m. On peut voir clairement que dans le premier cas l'image plan-pupille correspond aux fluctuations d'angle d'arrivée et que dans le deuxième cas l'image plan-pupille correspond à la scintillation. Ces images sont obtenues par simulation numérique où le diamètre du télescope est $D=30$ cm, la longueur d'onde est $\lambda=468.3$ nm et la largeur de la fente $w_x=6$ arcsec. La loi d'assombrissement centre-bord solaire est celle définie dans l'équation 2.3. La turbulence optique est isoplanétique avec $r_0(468.3nm)=4$ cm et $L_0=10$ m dans le cas d'une turbulence obéissant au modèle de von Kàrmàn.

C_1 et C_2 sont des constantes. $F(\vec{R})$ représente l'effet combiné de filtrage dû à la fente et à la fonction d'assombrissement centre-bord solaire, et à la fonction pupille.

On a donc un accès direct aux fluctuations de phase sous forme de variations d'intensité dans l'image plan-pupille.

Dans le cas où l'on a une couche turbulente située à une hauteur quelconque $h > 0$ alors il est possible en partant de considérations formelle [198, 22] et en se basant pour une partie sur l'approximation de l'optique géométrique d'imaginer que l'on puisse écrire les variations d'intensité dans l'image plan-pupille sous la forme

$$I_{pp}(\vec{R}) \propto C_1 \exp \left\{ 2\chi(\vec{R}) \right\} + C_2 F(\vec{R}) \otimes \left[\exp \left\{ 2\chi(\vec{R}) \right\} \left[-\frac{\partial \chi(\vec{R})}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(\vec{R})}{\partial x} \right] \right] \quad (4.16)$$

Il y'a donc un terme de scintillation $\exp \left\{ 2\chi(\vec{R}) \right\}$, de fluctuations d'angle d'arrivée $\frac{\partial \varphi(\vec{R})}{\partial x}$, et de dérivée monodirectionnelle des fluctuations de la log-amplitude $\frac{\partial \chi(\vec{R})}{\partial x}$. Ce dernier peut être négligé dans une première approximation.

En effet, lorsque $h = 0$, alors $I_{pp}(\vec{R})$ correspond aux fluctuations d'angle d'arrivée (avec filtrage dû à la diffraction à travers la fente et l'assombrissement centre-bord) parce que la scintillation et les fluctuations de la log-amplitude sont négligeables devant les fluctuations de phase.

Lorsque la hauteur h est très importante, le terme de scintillation devient dominant et l'on obtient sur l'image de la pupille une figure de scintillation qui est filtrée par la fente et l'assombrissement centre-bord solaire. La transition entre les fluctuations d'angle d'arrivée et la scintillation lorsque h augmente passe par un mélange des deux avec la dérivée spatiale monodirectionnelle de la log-amplitude mais celle-ci est très vite masquée par la scintillation.

Ce mélange entre scintillation et fluctuations d'angle d'arrivée peut poser des problèmes lorsqu'il s'agit de caractériser la turbulence optique à partir des mesures d'intensité dans le plan pupille. S'agit-il de fluctuations d'angle d'arrivée ? De scintillation ? des deux à la fois ? Et dans quelle proportion ?

Il existe deux solutions à ce petit problème. La première est de modéliser correctement l'observable représentée schématiquement dans l'équation 4.16, ses propriétés spectrales et statistiques. C'est une observable qui dépend de l'altitude au dessus du télescope et un moyen commode de la traiter réside dans l'expérience de triangulation dans le cadre du *profiling* des contributeurs basses couches à la turbulence optique diurne 4.3.6. Le *profiling* sera basé sur l'observable mesurée et sur une triangulation de type SLODAR [36]. L'autre solution est de conjuguer un plan virtuel situé loin derrière la pupille d'entrée au lieu de conjuguer celle-ci. Le principe serait une extension du système basée sur le principe du SCIDAR généralisé, développé pour la scintillation stellaire [8]. On aura donc sur l'image de ce plan conjugué les images de scintillation qui sont

filtrées par la fente (indispensable pour garantir une information isoplanétique) et l'assombrissement centre-bord solaire.

Ces deux pistes sont à l'heure actuelle à l'étude.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre on s'est intéressé à l'application de l'observation du plan pupille à l'étude de la turbulence optique solaire. On a commencé par examiner le principe expérimental optique tel qu'il peut être appliqué à l'observation d'une étoile. La généralisation à l'observation solaire montre que dans le cas où l'approximation du champ proche est satisfaite, il est possible, moyennant certaines précautions, d'avoir accès aux fluctuations d'angle d'arrivée au niveau de la pupille d'entrée du télescope. Celles-ci sont néanmoins filtrées par la diffraction à travers la fente que l'on met dans le plan focal du télescope pour limiter les effets de l'anisoplanétisme non-local. Cette transformation des fluctuations d'angle d'arrivée en variations d'intensité n'est possible que dans le cas d'isoplanétisme local, où l'angle de *seeing* est inférieur à l'angle d'isoplanétisme de la turbulence optique. Ce filtrage reste néanmoins en deça de celui qui est introduit par la plupart des moniteurs plan-image et permet de ce fait d'atteindre de bonnes résolutions en terme de *profiling* vertical de la turbulence optique. La plupart des travaux sur l'observation plan-pupille des fluctuations de la phase se basent sur l'approximation du champ proche où l'on néglige la scintillation. L'impact qu'a cet effet sur les observation mentionnées est discuté et des solutions à approfondir sont enfin proposées.

Chapitre 5

La variation temporelle de la turbulence optique

5.1 La variation temporelle de la turbulence optique et la HRA

La dimension temporelle de la turbulence optique est un aspect fondamental de la turbulence en Haute Résolution Angulaire au sol. En effet, les performances de telle ou telle technique d'observation dépendent fortement des taux de variation de la turbulence optique durant les mesures.

Si on considère par exemple l'interférométrie des tavelures (*speckle interferometry*), le but est de retrouver dans les images courte-pose les hautes fréquences angulaires de la distribution angulaire initiale de l'objet d'étude que l'on ne retrouve plus dans les images longue-pose brouillées par la variation temporelle de la turbulence optique. On fait donc l'acquisition des images courte-pose durant des temps d'exposition qui sont inférieurs au temps de cohérence de la turbulence optique afin d'éviter le brouillage partiel de ces images pour accéder aux plus hautes fréquences spatiales possibles. De telles considérations sur le temps d'exposition mènent à des problèmes de détectabilité et de bruits de détection réduisant le choix des cibles éventuelles pour cette technique de traitement. D'un autre côté, comme on procède à la reconstruction des images par un traitement statistique, il n'est pas nécessaire que la durée entre les images successives soit trop inférieure au temps de cohérence de la turbulence optique, afin de ne pas effectuer un sur-échantillonnage temporel inutile qui n'apporte rien du point de vue de l'erreur statistique au résultat du traitement. Pour ces considérations, et surtout pour la première, il est important de caractériser le temps de cohérence de la turbulence optique afin d'optimiser l'efficacité de l'interférométrie des tavelures et autres techniques de traitement associées [2, 3, 185, 168]. Une autre façon de décrire les choses serait de dire que pour un temps d'exposition donné, il y a intérêt pour l'interférométrie des tavelures à ce que la turbulence varie

lentement dans le temps.

Les mêmes conditions relatives à de lentes variations de la turbulence optique sont aussi favorables pour les techniques de compensation en temps réel des effets de la turbulence optique sur les mesures en haute résolution angulaire [61].

En optique adaptative, le même souci d’avoir des mesures de la déformation du front d’onde durant un temps d’exposition inférieur au temps de brouillage dû à la turbulence optique existe. Ce temps de cohérence des fluctuations de phase doit être connu précisément car il conditionne le choix des étoiles de référence et le niveau de détectabilité avec les biais de mesures associés. Ce choix des étoiles de référence peut avoir aussi une incidence sur l’erreur due à l’anisoplanétisme dans l’application des déformations mesurées aux fronts d’onde issus de l’objet d’étude. Un autre aspect de l’effet de la variation de la turbulence optique sur les performances de l’optique adaptative est lié au temps de réponse de celle-ci [66]. En effet, il s’écoule un temps non-négligeable entre le moment de la mesure des déformations des fronts d’onde des rayonnements issus des étoiles de référence et l’application des compensations nécessaires sur les fronts d’onde issus de l’objet étudié. Si entre-temps la distribution spatiale des fluctuations de phase a varié, la correction appliquée perd de sa pertinence et conduit à une erreur qui dépend du taux de variation de la turbulence optique dans le champ de détection du senseur de front d’onde. Pour un temps d’exposition donné et un temps de réponse donné d’un système d’optique adaptative, il est important que la turbulence varie lentement dans le temps.

Les mêmes arguments s’appliquent dans le cas de l’interférométrie à longue-base. Le temps d’exposition doit être inférieur au temps de brouillage des franges d’interférence par la turbulence optique [94]. Il doit en être de même pour le temps de réponse des systèmes de correction par suivi des franges [41, 49]. Pour un temps d’exposition et un temps de réponse donnés d’un système de compensation par suivi des franges, il est favorable que la turbulence varie lentement dans le temps.

Les observations astrométriques à partir du sol sont sensibles elles aussi à la variation temporelle de la turbulence optique. Elles se basent en effet sur des mesures de positions angulaires relatives en longue-pose afin de moyenner dans le temps les perturbations introduites par la turbulence optique. La précision des mesures astrométriques, que ce soit dans le cas d’un télescope mono-pupille [112] ou d’un interféromètre [163], dépend essentiellement de l’évolution temporelle de la turbulence optique et de la manière selon laquelle celle-ci s’intègre dans le temps [18]. Pour un temps d’intégration donné, il y a intérêt à ce que la turbulence varie rapidement dans le temps, afin d’intégrer un maximum de fluctuations de positions relatives différentes.

La variation de la turbulence optique est habituellement modélisée avec l’approximation de la turbulence gelée, où la turbulence dans chaque couche est supposée se déplacer en bloc à une vitesse constante au dessus de l’instrument d’observation sans subir de déformation propre. Cet aspect a été démontré expérimentalement dans diverses situations où l’on a montré le déplacement horizontal des structures de la turbulence relativement aux champs de vision des instruments [184]. La modélisation de l’évolution temporelle de la turbulence optique

selon cette approximation [149, 43, 7] permet de décrire la réponse des système d’observation à haute résolution angulaire sur de courtes échelles temporelles, tout en offrant un cadre d’interprétation des mesures expérimentales [128, 143]. Dans le cadre de cette approximation les propriétés statistiques temporelles de la turbulence optique sont déterminées par les vitesses de déplacement horizontal des couches turbulentes au dessus des instruments [158, 157, 170].

Le caractère déterministe de l’approximation de la turbulence gelée permet de plus d’envisager l’anticipation des déformations du front d’onde à une position donnée sur le plan pupille d’un senseur de front d’onde à partir des mesures de déformations prises préalablement à une autre position [89, 117]. Ceci permet d’avoir moins de restrictions sur le temps de réponse des systèmes d’optique adaptative. Avec les diamètres que peuvent atteindre les télescopes aujourd’hui et dans l’avenir proche, on peut s’attendre à ce que la turbulence optique mette un temps important pour traverser le plan pupille d’entrée de tels instruments. D’un autre côté, les mesures astrométriques reposent sur des longues poses allant de quelques minutes à plusieurs heures.

On ne peut raisonnablement imaginer cependant que la turbulence optique puisse rester indéfiniment gelée, même si du point de vue formel, l’approximation de la turbulence gelée paraît être le seul mode d’expression temporel de la turbulence optique. En effet, tout en se déplaçant dans le plan pupille des instruments d’observation, la turbulence optique subit une variation temporelle propre aléatoire qui se superpose à la variation temporelle apparente qui est produite par le déplacement relatif de la turbulence optique dans le champ d’observation [72, 170, 95]. Dans tout ce qui suit cette évolution propre sera nommée le Bouillonnement de la Turbulence Optique (*the Optical Turbulence Boiling*). Les expériences dédiées à la détermination du domaine de validité de l’approximation de la turbulence gelée [157, 170, 159] montrent qu’elle se réduit à quelques dizaines de millisecondes à cause du bouillonnement de la turbulence optique [171, 160].

N’ayant pas trouvé de modèle décrivant explicitement la variation temporelle de la turbulence optique par bouillonnement, je propose dans ce chapitre un cadre formel théorique pouvant modéliser cet effet. C’est un modèle qui décrit les propriétés statistiques de la variation temporelle de la turbulence optique dans le cadre d’une pure translation dans le champ de vision, ou du bouillonnement seul, ou dans le cas où les deux processus sont simultanément présents. Des applications de ces modèles à des situations réelles sont aussi présentées à titre d’exemple. Il s’agit de l’optique adaptative prédictive, de l’astrométrie différentielle avec un télescope monopupille, et l’astrométrie différentielle avec un interféromètre longue-base à deux télescopes. Une méthode de simulation numérique du bouillonnement de la turbulence optique est aussi proposée dans le cadre des fluctuations de phase au sol. Le modèle proposé comme étant une hypothèse de travail à confronter à l’expérience se veut un cadre théorique permettant une description qualitativement plus satisfaisante et quantitativement plus rigoureuse que le cadre de l’approximation de la turbulence gelée. C’est ce qui est présenté dans ce qui suit.

5.2 Les variations temporelles de la turbulence optique

Lorsqu'on regarde la formation d'un écoulement turbulent, que ce soit dans une expérience de soufflerie ou juste dans la complexification croissante de la fumée d'une cigarette, on peut intuitivement décomposer la dynamique observée selon deux schémas phénoménologiques.

Dans un premier temps on voit la formation des tourbillons et la croissance de la complexité des configurations spatiales du champ de vitesse avec le temps. Ceci est dû à la nature même de la dynamique turbulente du fluide observé. C'est un mouvement propre au flux. A ce mouvement chaotique se superpose un mouvement d'ensemble affectant toutes les structures tourbillonnaires et les faisant se déplacer par rapport l'observateur. C'est un mouvement relatif de l'ensemble du champ de turbulence par rapport à l'observateur.

De la même manière, on peut étendre cette description à la turbulence optique et ainsi distinguer deux tendances dynamiques majeures dans son évolution temporelle. On va considérer pour simplifier la description d'une turbulence optique qui est due à une couche turbulente unique dans l'atmosphère. Une description plus complète requiert la prise en compte des contributions de toutes les couches turbulentes de l'atmosphère.

On distingue tout d'abord une évolution temporelle apparente qui est due au mouvement de translation de l'ensemble du champ de fluctuations de la turbulence optique par rapport au champ de vision de l'observateur. Cette composante de l'évolution temporelle de la turbulence optique dépend de la vitesse de déplacement horizontal de la couche turbulente, vitesse imprimée par le vent à la hauteur de la couche. En effet, au cours du temps l'observateur va "voir" des zones différentes du champ spatial des fluctuations de la turbulence optique à des instants différents, ce qui induit pour lui une évolution temporelle apparente.

On distingue aussi une évolution temporelle propre, celle qui est due à la dynamique chaotique même de la turbulence. Cette évolution propre et indépendante du mouvement relatif de la couche turbulente par rapport à l'observateur est le Bouillonnement de la Turbulence Optique (*Optical Turbulence Boiling*). C'est ce que mesurerait un observateur qui se déplacerait exactement à la même vitesse que la couche turbulente étudiée. En effet, cet observateur va "voir" la même zone du champ spatial de fluctuations de la turbulence optique qui évolue dans le temps.

Si la couche turbulente ne se déplace pas par rapport au champ de vision de l'observateur, la turbulence optique évolue par bouillonnement seulement. Si l'évolution temporelle par bouillonnement est très négligeable devant celle causée par le déplacement horizontal relatif alors c'est comme si la turbulence n'évolue pas et qu'elle était gelée. C'est l'approximation de la turbulence gelée ou l'hypothèse de Taylor. Dans le cas le plus général on a une contribution des deux processus et la turbulence optique évolue par bouillonnement propre et par déplacement horizontal relatif. Ce sont ces trois cas que l'on va regarder dans ce qui suit.

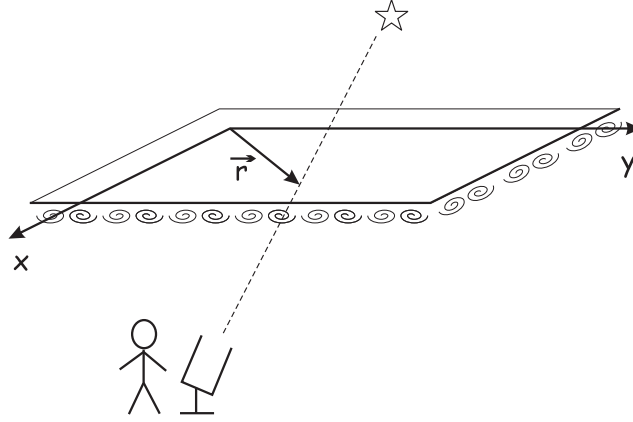


FIG. 5.1 – Schéma montrant la représentation des distances spatiales liées à la couche turbulente à l'origine de la turbulence optique observée.

5.3 L'approximation de la turbulence gelée - *the Frozen Flow Hypothesis*

Supposons pour simplifier, une couche turbulence unique à une hauteur quelconque. Et supposons un observable quelconque de la turbulence optique $X(\vec{r}, t)$ à un instant t donné dont l'origine est une zone de la couche turbulente à une position \vec{r} tel que schématisé dans la figure 5.1. Cet observable peut représenter des fluctuations de phase, la scintillation, des fluctuations d'angle d'arrivée, des fluctuations de piston différentiel ou une autre observable dont nous dirons qu'elle est liée d'une manière ou d'une autre aux fluctuations de phase.

Dans l'approximation de la turbulence gelée, communément appelée "l'Hypothèse de Taylor" (*the Taylor Hypothesis*) ou *the Frozen Flow Hypothesis*, la seule variation temporelle de la turbulence optique est une translation horizontale à une vitesse \vec{v} liée au vent en altitude. C'est la vitesse de déplacement horizontal de la couche turbulente dans le champ de vision de l'observateur. La distribution spatiale relative des fluctuations de l'observable ne varie pas dans le temps. Ce qui varie c'est la position relative de cette distribution par rapport au champ de vision de l'observateur. C'est toute la distribution spatiale des fluctuations qui se déplace en bloc sans qu'elle subisse de déformation propre.

Supposons que l'on fasse à un instant t une mesure $X(\vec{r}, t)$ d'un événement turbulent (une fluctuation) issu de la position \vec{r} dans la couche turbulente. Comme la couche turbulente se déplace à une vitesse constante \vec{v} , l'événement que l'on mesure à l'instant t à la position \vec{r} est le même événement qui était à un instant antérieur t_0 à une position $\vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{v}[t - t_0]$. La structure de la turbulence optique issue de la position \vec{r}_0 à l'instant t_0 a voyagé sans changement à la vitesse \vec{v} jusqu'à la position \vec{r} durant l'intervalle de temps $t - t_0$. C'est

ce qui arrive à tous les points du champ spatial des fluctuations de l'observable considérée. On écrira

$$X(\vec{r}, t) = X(\vec{r} - \vec{v}[t - t_0], t_0) \quad (5.1)$$

L'approximation de la turbulence gelée nous permet donc d'associer aux mesures effectuées à tout instant t d'une observable issue d'un point situé en \vec{r} des mesures de l'observable issue de positions différentes $\vec{r} - \vec{v}[t - t_0]$ rapportée à un instant initial quelconque t_0 . Ceci permet de ramener les moments statistiques temporels à des moments statistiques spatiaux.

Prenons par exemple la covariance temporelle $R_{X(\vec{r}, t)}(\tau)$ des fluctuations $X(\vec{r}, t)$ définie par

$$R_{X(\vec{r}, t)}(\tau) = \langle X(\vec{r}, t_0) X(\vec{r}, t_0 + \tau) \rangle \quad (5.2)$$

L'approximation de la turbulence gelée permet d'associer $X(\vec{r}, t_0 + \tau)$ à $X(\vec{r} - \vec{v}\tau, t_0)$, la même fluctuation issue de l'évènement turbulent situé à la position $\vec{r} - \vec{v}\tau$ et qui a voyagé jusqu'à \vec{r} durant l'intervalle de temps τ . La covariance temporelle devient ainsi

$$R_{X(\vec{r}, t)}(\tau) = \langle X(\vec{r}, t_0) X(\vec{r} - \vec{v}\tau, t_0) \rangle \quad (5.3)$$

Comme les propriétés statistiques spatiales de la turbulence optique sont statistiquement homogènes, cette expression n'est ni plus ni moins qu'une covariance spatiale $B_{X(t_0)}(\vec{v}\tau)$ de l'observable $X(\vec{r}, t)$ selon une base de séparation spatiale $-\vec{v}\tau$. On aura donc

$$R_{X(\vec{r}, t)}(\tau) = B_{X(t_0)}(-\vec{v}\tau) \quad (5.4)$$

Il y a une équivalence, statistiquement parlant, entre les intervalles de temps τ et les bases de séparation spatiale $-\vec{v}\tau$ sur la couche turbulente. Ceci rend triviale la description des propriétés statistiques temporelles de la turbulence optique puisque la modélisation de celle-ci se fait essentiellement via des modélisations spectrale et statistique spatiales. Il suffit ainsi de connaître la vitesse de déplacement de la couche turbulente par rapport au champ de vision de l'observateur pour pouvoir passer des propriétés statistiques spatiales aux propriétés temporelles pour ce qui concerne les observables de la turbulence optique issues de la contribution de cette couche turbulente. On en viendrait presque à se dire que l'on n'a pas besoin des spectres temporels de la turbulence optique! Ceci n'est vrai que dans ce cas restreint de l'approximation de la turbulence gelée. C'est pourtant ce qu'on va calculer dans ce qui suit.

5.3.1 Les densités spectrales temporelles dans l'approximation de la turbulence gelée

La densité spectrale temporelle d'une observable donnée de la turbulence optique s'obtient le plus souvent en se basant sur l'équivalence entre les covariances temporelle et spatiale comme dans l'équation 5.4 et sur le théorème de

Wiener-Khintchin [43, 7]. Les covariances temporelle et spatiale sont données respectivement par les transformées de Fourier des densités spectrales temporelle et spatiale, et comme les covariances sont équivalentes, il y a une relation entre les deux densités spectrales. La densité spectrale temporelle unidimensionnelle est obtenue par intégration de la densité spectrale spatiale bidimensionnelle selon un axe orthogonal à la direction de la vitesse de déplacement de la couche turbulente.

Il est toutefois possible d'aborder le problème selon une approche légèrement différente [18]. Cette approche se base sur l'équation 5.1 plutôt que sur l'équation 5.4.

Considérons une décomposition de Fourier en harmoniques spatiaux du champ spatial des fluctuations $X(\vec{r}, t)$ à un instant initial t_0 quelconque. On peut ainsi écrire $X(\vec{r}, t_0)$ sous la forme

$$X(\vec{r}, t_0) = \int d\vec{f} \bar{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} \cdot \vec{r} \right\} \quad (5.5)$$

où $\bar{X}(\vec{f}, t_0)$ est la transformée de Fourier spatiale de $X(\vec{r}, t_0)$. On rappelle que comme la distribution spatiale des fluctuations $X(\vec{r}, t)$ est spatialement aléatoire et imprédictible, alors $\bar{X}(\vec{f}, t_0)$ est une quantité complexe avec une amplitude et une phase aléatoires. Seules sont prédictibles et reproductibles les propriétés statistiques telles que la densité spectrale spatiale $W_X(\vec{f})$ de cette observable $X(\vec{r}, t)$ qui est donnée par $W_{X(t_0)}(\vec{f}) = \langle |\bar{X}(\vec{f}, t_0)|^2 \rangle$. On gardera en tête que $\bar{X}(\vec{f}, t_0)$ est aléatoire et qu'elle contient une phase aléatoire.

Suivant l'équation 5.1 définie par l'approximation de la turbulence gelée, $X(\vec{r}, t)$ à un instant t n'est autre que cette même distribution $X(\vec{r}, t_0)$ à cet instant initial t_0 mais définie pour une position $\vec{r} - \vec{v}[t - t_0]$ sur la couche turbulente. On peut donc écrire

$$X(\vec{r}, t) = \int d\vec{f} \bar{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} \cdot [\vec{r} - \vec{v}[t - t_0]] \right\} \quad (5.6)$$

Si on observe chaque composante spectrale spatiale indépendamment, chacune se comporte comme une onde oscillant à une fréquence temporelle ν qui est donnée par

$$\nu = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (5.7)$$

En effet, pour un observateur fixe avec un champ de vision fixe, chaque composante spectrale spatiale se présente comme une oscillation temporelle localisée avec une fréquence temporelle déterminée qui est d'autant plus haute que la vitesse de déplacement de la couche turbulente est grande. Pour donner une analogie, c'est comme l'aiguille d'un tourne-disque qui percevrait du défilement des sillons du disque que les vibrations localisées, dont les fréquences temporelles sont d'autant plus hautes que la vitesse de rotation du disque est grande.

La vitesse de déplacement de la couche turbulente détermine dans cette approximation de la turbulence gelée une identification fréquentielle entre les

fréquences spatiales des fluctuations de l'observable de turbulence optique et les fréquences temporelles de cette même observable. Elle détermine aussi un identification spectrale causale dans le sens où une composante spectrale de fréquence spatiale \vec{f} oscille avec une fréquence temporelle $\nu = \vec{f} \cdot \vec{v}$. Il y a donc identification entre la composante spectrale spatiale et la composante spectrale temporelle correspondante.

D'un autre côté on peut aussi faire une décomposition de Fourier en harmoniques temporels des fluctuations $X(\vec{r}, t)$ issues d'une position \vec{r} . On peut ainsi l'écrire sous la forme

$$X(\vec{r}, t) = \int d\nu \underline{X}(\nu, \vec{r}) \exp \{-2\pi i \nu [t - t_0]\} \quad (5.8)$$

$\underline{X}(\nu, \vec{r})$ est la transformée de Fourier temporelle de $X(\vec{r}, t_0)$. Comme les fluctuations temporelles $X(\vec{r}, t)$ sont aléatoires et imprédictibles, alors $\underline{X}(\nu, \vec{r})$ est une quantité complexe avec une amplitude et une phase aléatoires. Seules sont prédictibles et reproductibles les propriétés statistiques telles que la densité spectrale temporelle $\omega_X(\nu)$ de cette observable $X(\vec{r}, t)$, qui est donnée par $\omega_{X(\vec{r})}(\nu) = \langle |\underline{X}(\nu, \vec{r})|^2 \rangle$.

L'identification entre les fréquences temporelles et les fréquences spatiales dans l'équation 5.6 nous permet d'isoler dans les équations 5.6 et 5.8 les contributions à une fréquence temporelle ν quelconque de $X(\vec{r}, t)$. Ceci permet d'écrire

$$\underline{X}(\nu, \vec{r}) d\nu = \int_{\nu=\vec{f} \cdot \vec{v}} d\vec{f} \overline{X}(\vec{f}, t_0) \exp \{2\pi i \vec{f} \cdot \vec{r}\} \quad (5.9)$$

Le deuxième terme de l'équation est une intégrale selon les seules fréquences des composantes spectrales spatiales qui oscillent à une fréquence temporelle ν . Ce sont les fréquences temporelles qui satisfont à l'équation 5.7.

Avec la définition de la densité spectrale temporelle $\omega_X(\nu)$, nous obtenons

$$\omega_{X(\vec{r})}(\nu) d\nu = \left\langle \left| \int_{\nu=\vec{f} \cdot \vec{v}} d\vec{f} \overline{X}(\vec{f}, t_0) \exp \{2\pi i \vec{f} \cdot \vec{r}\} \right|^2 \right\rangle \quad (5.10)$$

$\overline{X}(\vec{f}, t_0)$ est une quantité complexe aléatoire et les valeurs assignées à chaque fréquence spatiale \vec{f} sont statistiquement indépendantes. La variance de la somme des contributions est donc la somme des variances, ce qui donne

$$\omega_{X(\vec{r})}(\nu) d\nu = \int_{\nu=\vec{f} \cdot \vec{v}} d\vec{f} \left\langle |\overline{X}(\vec{f}, t_0)|^2 \right\rangle \quad (5.11)$$

Et comme la variance du spectre spatial n'est autre que la densité spectrale spatiale, on obtient ainsi la relation d'identification entre densités spectrales temporelle et spatiale dans le cas de l'approximation de la turbulence gelée. Elle s'écrit

$$\omega_{X(\vec{r})}(\nu)d\nu = \int_{\nu=\vec{f}\vec{v}} d\vec{f} W_{X(t_0)}(\vec{f}) \quad (5.12)$$

Cette équation exprime la redistribution de l'énergie turbulente de l'observable fluctuante de turbulence optique du domaine des fréquences spatiales vers le domaine de fréquences temporelles. La densité spectrale temporelle à une fréquence temporelle donnée est l'intégrale de la densité spectrale spatiale selon les fréquences spatiales des composantes spectrales spatiales qui ont pour fréquence temporelle d'oscillation la dite fréquence temporelle, soient les fréquences qui vérifient la relation d'identification fréquentielle dans l'approximation de la turbulence gelée.

Afin de simplifier cette expression, on peut choisir un système de coordonnées en fréquences spatiales $\vec{f}' = f'_x \vec{i}' + f'_y \vec{j}'$ telles que \vec{i}' soit aligné avec la vitesse de déplacement de la couche turbulente \vec{v} . Dans ce cas la relation d'identification des fréquences temporelles et spatiales dans l'approximation de la turbulence gelée s'écrit $\nu = v f'_y$. La relation d'identification des densités spectrales temporelle et spatiale s'écrit alors dans ce référentiel

$$\omega_{X(\vec{r})}(\nu)d\nu = \frac{1}{v} \int df'_y W_{X(t_0)}\left(\frac{\nu}{v}, f'_y\right) \quad (5.13)$$

En disposant de la densité spectrale spatiale des fluctuations $X(\vec{r}, t)$, il est possible de retrouver grâce à cette relation sa densité spectrale temporelle dans le cadre de l'approximation de la turbulence gelée.

5.4 Le Bouillonnement de la Turbulence Optique - *the Optical Turbulence Boiling*

Rien ne nous empêche d'imaginer une situation dans laquelle la couche turbulente en altitude est stationnaire par rapport au champ de vision de l'observateur de la turbulence optique. Dans ce cas $v = 0$ et il n'y a pas d'évolution temporelle par déplacement horizontal de la couche turbulente. La turbulence optique n'est pas figée pour autant, car elle évolue selon le phénomène du bouillonnement de la turbulence optique décrit plus haut. Ce bouillonnement optique, hautement aléatoire et totalement imprédictible, est la résultante du bouillonnement affectant la turbulence dynamique elle-même dans l'atmosphère.

Dans une turbulence pleinement développée comme celle qui se développe dans les hautes couches turbulentes de l'atmosphère, on ne sait pas exactement comment évoluent les grandeurs physiques, elles sont aléatoires, mais leurs propriétés statistiques et spectrales sont reproductibles. Une telle description est donc possible pour le bouillonnement de la turbulence optique, elle découle de la description statistique de la turbulence dynamique.

Pour une description statistique et spectrale du bouillonnement dynamique, replongeons-nous dans le modèle de la cascade énergétique de Richardson dans

la turbulence dynamique pleinement développée. Dans cette approche la turbulence pleinement développée est décomposée en une distribution aléatoire continue de structures de diverses échelles spatiales et temporelles au travers desquelles s'effectue une structuration de l'énergie cinétique en fonction de ces échelles (Paragraphe 1.2.2) afin de permettre un transport permanent de proche en proche de l'énergie injectée au niveau des grands tourbillons aux plus petits (en termes d'échelle essentiellement).

On peut se faire une idée de ce qui se passe en moyenne par un raisonnement dimensionnel. Pour cela, considérons une décomposition spatiale unidimensionnelle du champ de turbulence dynamique. On a schématiquement une infinité de structures turbulentes à toutes les longueurs l avec des dispositions aléatoires les unes par rapport aux autres qui se superposent aléatoirement. L'énergie cinétique injectée au niveau des plus grandes structures est transmise en cascade de proche en proche (en terme d'échelles spatiales) jusqu'aux plus petites échelles où elle est dissipée en chaleur. S'il n'y a plus d'énergie injectée en permanence, toute l'énergie du système finit par s'épuiser et se dissiper et la turbulence disparaît. Lorsqu'il y a alimentation permanente en énergie cinétique, un régime stationnaire s'établit où le taux d'énergie injectée est égal au taux d'énergie dissipée. Il s'établit aussi aux échelles intermédiaires un régime stationnaire de transfert d'énergie. Le même taux d'énergie cinétique "traverse" toutes les échelles de longueur l . Dans ce régime stationnaire chaque échelle de turbulence de longueur l est caractérisée par une fluctuation de vitesse u_l et un temps de fluctuation caractéristique τ_l . Ces grandeurs sont liées par

$$u_l = l/\tau_l \quad (5.14)$$

Le taux d'énergie qui cascade à travers les échelles spatiales est constant, il a la dimension d'une vitesse au carré (énergie cinétique) divisée par un temps. Le taux d'énergie traversant une structure turbulente de longueur l durant un temps de fluctuation τ_l est proportionnel au carré de la fluctuation de vitesse u_l associée à cette longueur d'échelle divisé par le temps de fluctuation correspondant. Et comme ce taux d'énergie est une constante, alors le temps de fluctuation est proportionnel au carré de la fluctuation de vitesse. On peut donc écrire

$$\tau_l \propto u_l^2 \quad (5.15)$$

En combinant les deux équations précédentes, et en remplaçant la fluctuation de vitesse dans la deuxième, on en arrive à une relation de proportionnalité entre le temps de fluctuation τ_l d'une structure donnée et la longueur l de celle-ci à la puissance 2/3 [127, 170, 95, 18]. On trouve en effet

$$\tau_l \propto l^{2/3} \quad (5.16)$$

On a une relation d'identification fréquentielle entre les fréquences spatiales et temporelles dans la turbulence dynamique pleinement développée.

La turbulence optique est comme une projection bidimensionnelle du champ tridimensionnel des fluctuations de la turbulence dynamique qui lui donne nais-

sance. Elle en tire d'ailleurs ses propriétés statistiques et spectrales (Paragraphe 1.3.3). On peut dire aussi qu'il existe implicitement une équivalence entre les fréquences spatiales bidimensionnelles de la turbulence optique et certaines fréquences spatiales tridimensionnelles de la turbulence dynamique telle que peut le montrer l'équation 1.32 par exemple. On peut raisonnablement en conclure qu'à une composante spectrale spatiale de fréquence donnée dans le champ bidimensionnel de la turbulence optique est associée la même fréquence temporelle que pour la composante spectrale spatiale de fréquence correspondante dans le champ tridimensionnel de la turbulence dynamique.

Il s'ensuit que dans la turbulence optique évoluant par bouillonnement on a la relation d'identification entre les fréquences temporelles ν et les fréquences spatiales f qui s'écrit

$$\nu \propto f^{2/3} \quad (5.17)$$

On peut définir une constante de proportionnalité ν_0 reliant les fréquences spatiales et temporelles dans cette relation d'identification qui s'écrit maintenant

$$\nu = \nu_0 f^{2/3} \quad (5.18)$$

La fréquence temporelle associée à chaque fréquence spatiale est d'autant plus élevée que la constante de proportionnalité ν_0 est grande. C'est un paramètre (pas une fréquence) qui peut caractériser le taux d'évolution de la turbulence optique par bouillonnement et dont l'unité est en $m^{2/3}s^{-1}$.

La relation d'identification fréquentielle va nous servir pour modéliser les propriétés spectrales et statistiques temporelles du bouillonnement de la turbulence optique.

5.4.1 Le bouillonnement aux échelles limites du domaine inertiel

La relation d'identification spectrale qu'on a établie dans l'équation 5.18 entre les fréquences spatiales et temporelles a été déduite des propriétés statistiques de la turbulence dynamique pleinement développée à l'intérieur du domaine inertiel où ne s'effectue ni injection d'énergie cinétique autre que celle apportée par la cascade d'énergie, ni dissipation visqueuse d'énergie. Cette relation n'est valable que dans ce domaine inertiel.

On peut imaginer qu'aux plus petites échelles spatiales, là où s'effectue la dissipation visqueuse de l'énergie cinétique portée par les fluctuations de vitesse, les structures turbulentes manquent d'énergie cinétique parce qu'une partie de celle qu'elles reçoivent est perdue sous forme de chaleur. Dans ce cas, ces structures de très hautes fréquences spatiales sont ralenties par cette déperdition d'énergie cinétique par rapport à ce que ça aurait été si elles étaient sans viscosité. Le ralentissement se traduit par une diminution accrue des fréquences temporelles associées aux fréquences spatiales correspondant à ces échelles jusqu'à la fréquence temporelle nulle pour l'échelle interne de turbulence.

Au niveau des plus grandes échelles spatiales, là où s'effectue l'injection de l'énergie cinétique dans le système, les structures turbulentes ont tendance à recevoir plus ou moins la même énergie cinétique et à "tourner" plus ou moins à la même fréquence temporelle. On peut donc imaginer qu'il y a ralentissement à ces grandes échelles dans le sens où la fréquence temporelle diminue plus rapidement que ce que prévoit la loi d'identification fréquentielle déduite des propriétés la turbulence dans le domaine inertiel. La relation d'identification fréquentielle devrait décroître rapidement avant d'adopter une pente plus douce jusqu'à devenir nulle aux très basses fréquences.

Ces ralentissements requièrent une distorsion de la relation d'identification fréquentielle telle que donnée par l'équation 5.18. La relation d'identification fréquentielle dépend des échelles interne et externe de la turbulence optique au niveau desquelles s'effectue le ralentissement. On l'écrira dans le cas général

$$\nu = \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0) \quad (5.19)$$

l_0 et L_0 sont respectivement l'échelle interne et externe de la turbulence optique.

On ne sait pas encore comment s'effectue exactement la distorsion de la relation d'identification fréquentielle et encore moins comment elle s'accorde aux modèles de densité spectrale spatiale de la turbulence optique. Il reste néanmoins possible de recourir à des distorsions ad hoc pour être le plus près des mesures réelles.

On peut par exemple proposer une fonction d'identification fréquentielle sous la forme d'une distorsion mutiplicative de la forme en loi de puissance, un peu comme le modèle exponentiel dans les densités spectrales spatiales. On écrirait par exemple

$$\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0) = \nu_0 f^{2/3} \exp \left\{ - \left[\frac{2\pi l_0 f}{3.3} \right]^2 \right\} \left[1 - \exp \left\{ - [L_0 f]^2 \right\} \right] \quad (5.20)$$

Comme l'échelle externe est supposée isotrope alors cette fonction est axialement symétrique en \vec{f} comme on peut le voir dans cette écriture. Il serait d'ailleurs assez judicieux d'utiliser la même forme de distorsion dans la densité spectrale spatiale des fluctuations de l'observable de turbulence optique à modéliser avec cette fonction d'identification spectrale entre les fréquences temporelles ν et spatiales \vec{f} .

5.4.2 La variation temporelle de la turbulence optique par bouillonnement seul

Ayant établi une relation d'identification fréquentielle entre les fréquences spatiales et temporelles telle que dans l'équation 5.19, il devient envisageable de modéliser les propriétés statistiques et spectrales de l'évolution temporelle de la turbulence optique par bouillonnement.

Pour cela, on peut s'intéresser à une composante spatiale quelconque de fréquence spatiale donnée \vec{f} . Celle-ci est connectée à une fréquence temporelle ν comme on l'a vu précédemment. Si on s'intéresse à une position \vec{r} , cette composante spatiale donnera naissance à une oscillation temporelle de fréquence ν comme représenté dans la figure 5.2. On fera remarquer encore une fois que c'est une composante spectrale et non une structure physique de la turbulence. Elle a une amplitude et une phase aléatoires, et même si une composante spectrale isolée peut donner une impression de prédictibilité, il n'en est rien de la turbulence optique au point considéré car c'est une composition aléatoire de ces composants spectrales, d'où son caractère aléatoire et imprédictible. On remarquera aussi que cette oscillation temporelle a la même énergie (la même variance statistique) que la composante spatiale qui lui donne lieu. Il y a transfert d'énergie du domaine des fréquences spatiales vers le domaine des fréquences temporelles.

Chaque point de la composante spatiale oscille à la même fréquence temporelle, mais il faut qu'elle garde la même fréquence spatiale à tout instant. Pour cela, il faut que toutes les oscillations opèrent avec la même phase. Il y a donc une phase aléatoire rattachée à chaque composante spectrale spatiale. La composante spatiale oscille alors en amplitude comme une onde stationnaire.

Avec ces considérations, l'observable $X(\vec{r}, t)$ donnée par l'équation 5.5 à un instant t_0 peut être donnée à tout instant t par

$$X(\vec{r}, t) = \sqrt{2} \int d\vec{f} \bar{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} \cdot \vec{r} \right\} \times \cos \left\{ 2\pi \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)[t - t_0] + \phi_b(\vec{f}) \right\} \quad (5.21)$$

Le facteur $\sqrt{2} \cos \left\{ 2\pi \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)[t - t_0] + \phi_b(\vec{f}) \right\}$ représente l'introduction de l'oscillation en amplitude de la composante spectrale spatiale à la fréquence temporelle $\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$ avec une phase $\phi_b(\vec{f})$. La constante $\sqrt{2}$ assure la conservation de la variance relativement à l'introduction de la fonction Cosinus. $\phi_b(\vec{f})$ est une phase aléatoire telle que $0 \leq \phi_b(\vec{f}) < 2\pi$. Associée à la phase aléatoire et à l'amplitude aléatoire dans $\bar{X}(\vec{f}, t_0)$, elle assure l'imprédictibilité temporelle de $X(\vec{r}, t)$.

5.4.3 Les densités spectrales temporelles dans le cas du bouillonnement seul

Une onde stationnaire comme la composante spectrale spatiale oscillant en amplitude rencontrée dans l'équation 5.21 peut être obtenue par l'interférence de deux ondes de même fréquence et amplitude se déplaçant dans des directions opposées. L'équation précédente peut donc aussi bien s'écrire

$$X(\vec{r}, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\vec{f} \bar{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \left[\vec{f} \cdot \vec{r} - \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)[t - t_0] \right] \right\}$$

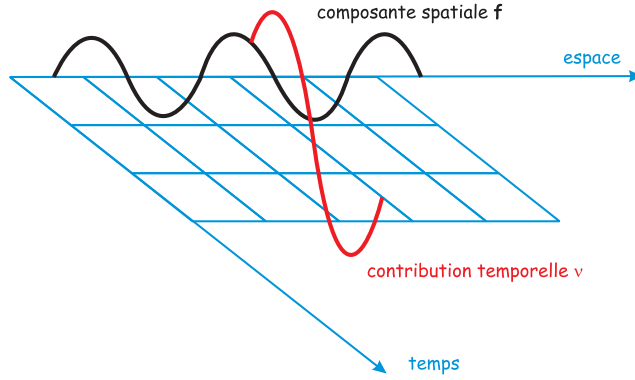


FIG. 5.2 – Schéma montrant la contribution à l'énergie associée à une fréquence temporelle donnée à partir de l'oscillation temporelle d'un point donné quelconque d'une composante spectrale spatiale représentée ici à une dimension. La composante spectrale spatiale de fréquence spatiale f oscille à une fréquence temporelle ν et cette oscillation contribue avec d'autres oscillations de même fréquence à définir l'énergie de la composante spectrale temporelle correspondante.

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left\{ -i\phi_b(\vec{f}) \right\} \\
 & + \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\vec{f} \overline{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \left[\vec{f} \cdot \vec{r} + \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)[t - t_0] \right] \right\} \\
 & \times \exp \left\{ i\phi_b(\vec{f}) \right\} (5.22)
 \end{aligned}$$

Une même fréquence spatiale donne dans cette écriture son énergie en parts égales à deux fréquences temporelles $+\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$ et $-\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$.

Avec la définition des composantes spectrales temporelles dans l'équation 5.8, on peut isoler la contribution d'une fréquence ν donnée. En conjonction avec l'équation précédente on obtient

$$\begin{aligned}
 \underline{X}(\nu, \vec{r}) d\nu &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\nu=+\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} \overline{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} \cdot \vec{r} - i\phi_b(\vec{f}) \right\} \\
 &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\nu=-\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} \overline{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} \cdot \vec{r} + i\phi_b(\vec{f}) \right\} (5.23)
 \end{aligned}$$

Le premier terme de l'addition est une intégrale dans l'espace des fréquences spatiales selon toutes les fréquences \vec{f} qui vérifient $\nu = +\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$ si elles existent. Il en est de même pour le deuxième terme avec les fréquences spatiales qui vérifient $\nu = -\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$. Le premier terme se vérifie pour les fréquences temporelles positives et le deuxième terme se vérifie pour des fréquences temporelles négatives. En pratique les deux intégrales n'existent pas simultanément, sauf pour le cas particulier $\nu = 0$ où elles participent toutes les

deux et où de toute façon elles sont égales. Cette propriété nous permet d'écrire directement (et en s'inspirant du développement fait pour le cas de l'approximation de la turbulence gelée, les calculs sont de même nature) la densité spectrale temporelle $\omega_{X(\vec{r})}(\nu)$ des fluctuations $X(\vec{r}, t)$ dans la turbulence optique sous la forme

$$\begin{aligned} \omega_{X(\vec{r})}(\nu)d\nu = & \frac{1}{2} \int_{\nu=+\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0} d\vec{f} W_{X(t_0)}(\vec{f}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\nu=-\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0} d\vec{f} W_{X(t_0)}(\vec{f}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

De la même manière, la première intégrale se réalise pour les fréquences temporelles positives et la deuxième pour les fréquences négatives, et elles ont chacune la moitié de la contribution à la fréquence $\nu = 0$. Comme de plus la densité spectrale temporelle est paire et que les deux intégrales couvrent le même domaine spectral spatial, on peut se contenter de calculer l'une d'elles et d'en déduire l'autre par symétrie.

5.4.4 Solutions analytiques dans le domaine inertiel

Il est possible de résoudre analytiquement l'équation 5.24 en considérant la relation d'identification fréquentielle obéissant au schéma dynamique statistique opérant dans le domaine inertiel de la turbulence, soit celle qui est donnée par l'équation 5.18.

Pour cela, considérons d'abord l'écriture de la densité spectrale spatiale de l'observable fluctuante optique $W_{X(t_0)}(\vec{f})$ en fonction de la densité spectrale spatiale des fluctuations de phase $W_{\varphi(t_0)}(f)$ soumise à un filtrage $W_F(\vec{f})$ en densité spectrale [43]. On écrira alors

$$W_{X(t_0)}(\vec{f}) = W_F(\vec{f})W_{\varphi(t_0)}(f) \quad (5.25)$$

Dans le domaine inertiel on peut spécifiquement écrire

$$W_{X(t_0)}(\vec{f}) = W_F(\vec{f})0.3827 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\zeta \lambda^2} \right] f^{-11/3} \quad (5.26)$$

On considère dans ce qui suit que $C(\lambda) = 0.3827 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\zeta \lambda^2} \right]$ pour simplifier la notation.

Pour les fréquences temporelles positives $\nu \geq 0$, nous avons à résoudre

$$\omega_{X(\vec{r})}(\nu)d\nu|_{\nu \geq 0} = \frac{C(\lambda)}{2} \int_{\nu=+\nu_0 f^{2/3}} d\vec{f} W_F(\vec{f}) f^{-11/3} \quad (5.27)$$

On exprime le filtrage $W_F(\vec{f})$ et l'intégrale en fonction des coordonnées polaires (f, θ_f) où f est la fréquence spatiale radiale et θ_f la fréquence spatiale horaire.

Lorsqu'on considère la relation d'identification qui est donnée par l'équation 5.18, on voit que les chemins d'intégration dans l'espace des fréquences spatiales sont des cercles concentriques de rayon $f = \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{3/2}$. L'intégration s'effectue selon θ_f . Tenant aussi compte que $d\nu = \frac{2\nu_0}{3} f^{-1/3} df$ qui est issue de la même relation d'identification, on obtient

$$\omega_{X(\vec{r})}(\nu)|_{\nu \geq 0} = \frac{3C(\lambda)}{4\nu_0} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^2 \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{-11/2} \int_0^{2\pi} d\theta_f W_F \left(\left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{3/2}, \theta_f \right) \quad (5.28)$$

La même opération peut être appliquée à chaque fois que l'on peut avoir une fonction inverse de la relation d'identification des fréquences temporelles et spatiales et que celle-ci est isotrope.

On peut définir la densité spectrale temporelle de toute observable relié aux fluctuations de phase par la fonction de filtrage $W_F(\vec{f})$.

Ainsi, la densité spectrale temporelle des fluctuations de phase $\omega_{\varphi(\vec{r})}(\nu)$ s'écrit

$$\omega_{\varphi(\vec{r})}(\nu)|_{\nu \geq 0} = \frac{3\pi C(\lambda)}{2\nu_0} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{-7/2} \cos^2 \left\{ \lambda \pi \frac{h}{\zeta} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^3 \right\} \quad (5.29)$$

On peut trouver aussi la densité spectrale temporelle de la scintillation $\omega_{\chi(\vec{r})}(\nu)$ qui s'écrit

$$\omega_{\chi(\vec{r})}(\nu)|_{\nu \geq 0} = \frac{3\pi C(\lambda)}{2\nu_0} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{-7/2} \sin^2 \left\{ \lambda \pi \frac{h}{\zeta} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^3 \right\} \quad (5.30)$$

La densité spectrale temporelle du piston différentiel pour deux télescopes de diamètre D , séparés d'une base B et pointant une même étoile $\omega_{\Delta\varphi(\vec{r})}(\nu)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta\varphi(\vec{r})}(\nu)|_{\nu \geq 0} = & \frac{3\pi C(\lambda)}{2\nu_0} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{-7/2} \left[\frac{2J_1 \left\{ \pi D \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{3/2} \right\}}{\pi D \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{3/2}} \right]^2 \\ & \left[1 - J_1 \left\{ 2\pi B \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{3/2} \right\} \right] \cos^2 \left\{ \lambda \pi \frac{h}{\zeta} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^3 \right\} \end{aligned} \quad (5.31)$$

D'autres applications sont possibles comme les fluctuations d'angle d'arrivée différentiel par exemple [18].

Ces résultats analytiques ne concernent que le cas du domaine inertiel et ne prennent pas en compte les effets d'échelles interne et externe. Pour cela, une solution numérique s'impose. Nous discuterons ce point lorsqu'on traitera le cas plus général de l'évolution temporelle de la turbulence optique par bouillonnement et déplacement horizontal relatif de la couche turbulente. On discutera

dans ce qui suit ce cas général de la description de la variation temporelle de la turbulence optique.

5.4.5 Application à l'optique adaptative multiconjuguée prédictive

La puissance des télescopes optiques modernes au sol repose en grande partie sur la performance des systèmes d'optique adaptative en opération. Il s'agit schématiquement d'observer le front d'onde issu d'un point-source situé dans le voisinage immédiat de l'objet observé. Ce point-source peut être une étoile brillante ou une étoile laser. La compensation des déformations du front d'onde est alors imposée au rayonnement issu de l'objet d'étude afin d'en redresser le front d'onde et obtenir ainsi une image limitée par la diffraction à travers le télescope.

Les deux limitations essentielles de l'optique adaptative viennent de l'angle isoplanétique fini et du temps de cohérence fini des perturbations du front d'onde. Ainsi, pour pouvoir appliquer les bonnes corrections du front d'onde à l'image de l'objet d'étude, il faut que l'étoile de référence en soit séparée angulairement de sorte que les perturbations de phase qui affectent le rayonnement qui en est issu soient les mêmes que celles du rayonnement issu de l'objet d'intérêt. Cette séparation est limitée par l'angle isoplanétique de la turbulence optique. Ceci interdit de faire des corrections homogènes sur des images grand champ dans le ciel. Pour y parvenir, l'optique adaptative multi-conjuguée (MCAO) repose sur la séparation optique des contributions issues des différentes couches turbulentes en turbulence optique et sur la mesure des fluctuations de phase issues de larges zones spatiales sur ces couches turbulentes. Cette tomographie de la turbulence optique permet de corriger les fluctuations de phase en fonction du profil de turbulence, ce qui revient à faire des corrections en fonction de la zone angulaire dans le champ du télescope. L'autre limitation vient du fait qu'il faut appliquer les corrections du front d'onde avant que celui-ci ne change de configuration. Il faut que les temps de réponse du système d'optique adaptative entre les mesures des déformations du front d'onde sur les étoiles de référence et l'application des déformations adéquates aux miroirs déformables soient inférieurs aux temps de décorrélation temporelle de la turbulence. Les senseurs de front d'onde sont basés sur une subdivision du plan pupille du télescope à l'aide de sous-pupilles dont les dimensions correspondent aux tailles moyennes des zones de cohérence spatiale du front d'onde. Si on considère la contribution d'une couche turbulente donnée, ou que toute la turbulence peut être ramenée à une couche équivalente unique se déplaçant typiquement à une vitesse $v = 10$ m/s, alors la turbulence optique met pour traverser des sous-pupilles circulaires de diamètre égal à 20 cm par exemple un temps d'une durée de l'ordre de 20 ms, ce qui permet de considérer que la description de la variation temporelle de la turbulence optique peut raisonnablement être décrite avec l'approximation de la turbulence gelée.

Du fait de l'éventuelle possibilité d'isoler les contributions individuelles des couches turbulentes à la turbulence optique au sol, l'optique adaptative multi-

conjuguée ouvre aussi un champ d'exploitation de l'approximation de la turbulence gelée. Considérons encore une fois la contribution d'une couche turbulente quelconque. Si on considère que la turbulence optique se déplace tout au long de la pupille du télescope sans subir de déformations propres, il est possible d'anticiper les déformations du front d'onde à appliquer au rayonnement issu de l'objet d'étude à partir des mesures des déformations du front d'onde mesurées sur les étoiles-guide un instant auparavant. La correction à appliquer en un point \vec{r} à un instant t correspond à la mesure effectuée au point $\vec{r} - \vec{v}[t - t_0]$ à un instant antérieur t_0 . Ceci permet une meilleure correction des fronts d'onde, une restriction moins sévère sur la rapidité de réponse du système d'optique adaptative et enfin d'étendre unidirectionnellement la mesure des déformations du front d'onde pour la couche en question, ce qui pour le cas multicouche avec une dispersion des vitesses correspond à un étalement du domaine de correction par l'optique adaptative multi-conjuguée.

Cette approche ne peut être appliquée que dans le domaine de validité de l'hypothèse de la turbulence gelée, ce qui limite le domaine de correction pour un télescope de grand diamètre. Si la turbulence optique issue d'une couche turbulente donnée se déplace à une vitesse $v = 10$ m/s dans le plan pupille d'un télescope de 10 m par exemple, alors elle le traversera en un temps de l'ordre de la seconde, ce qui est bien au dessus des temps de validité de l'hypothèse de la turbulence gelée. La turbulence optique a le temps de se décorréler par bouillonnement tout en se déplaçant sur la pupille.

Afin de caractériser la validité de l'anticipation sur le déplacement de la turbulence optique à travers la pupille, on doit caractériser son évolution propre par le bouillonnement. On considère schématiquement que l'on se déplace à la même vitesse que la turbulence optique sur la pupille et que l'on regarde son évolution propre tout en ignorant son déplacement. On s'intéressera aux fluctuations de phase au sol, même si les senseurs de front d'onde ne mesurent pas directement cette quantité.

La densité spectrale temporelle des fluctuations de phase quand elles ne varient temporellement que par le bouillonnement seul est donnée par

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(\nu)d\nu = & \frac{1}{2} \int_{\nu=+\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0} d\vec{f} W_\varphi(\vec{f}) \\ & x + \frac{1}{2} \int_{\nu=-\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0} d\vec{f} W_\varphi(\vec{f}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si la densité spectrale spatiale des fluctuations de phase $W_\varphi(\vec{f})$ est isotrope en fréquence spatiale \vec{f} de sorte qu'en coordonnées polaires on peut écrire $W_\varphi(\vec{f}) = W_\varphi(f)$ avec f la fréquence spatiale radiale définie positive, alors l'équation précédente peut s'écrire

$$\omega_\varphi(\nu)d\nu = \pi \int_{\nu=+\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0} f df W_\varphi(f)$$

$$+\pi \int_{\nu=-\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} f df W_\varphi(f) \quad (5.33)$$

Puisqu'il s'agit de grands télescopes, on ne peut se contenter du domaine inertiel dans ce traitement. On considèrera une relation d'identification fréquentielle qui prenne en compte les échelles spatiales limites de la turbulence optique.

Si on considère la relation d'identification fréquentielle décrite dans l'équation 5.20 par exemple, il est difficile de l'inverser. Un développement limité en séries de Taylor en donne l'expression suivante

$$\nu = \nu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[[-1]^n \frac{K_1^n}{n!} - \frac{1}{n!} [-K_1 - K_2]^n \right] f^{\frac{8+6(n-1)}{3}} \quad (5.34)$$

avec $K_1 = [2\pi l_0/3.3]^2$ et $K_2 = L_0^2$.

Cette fonction a néanmoins un grand nombre de racines et il devient difficile d'obtenir une formulation analytique simple de la densité spectrale temporelle comme dans le cas du domaine inertiel. On va donc résoudre l'équation 5.33 numériquement. La méthode numérique est la même que celle décrite dans le cas des fluctuations d'angle d'arrivée différentiel [18] sauf que dans ce cas l'intégration en fréquence spatiale est unidimensionnelle. Le code d'intégration numérique est donné dans l'annexe A à titre d'exemple.

La dégradation qu'introduit le bouillonnement de la turbulence optique sur les fronts d'onde se déplaçant dans le plan du senseur de front d'onde équivaut à l'introduction du caractère aléatoire dans un processus complètement déterministe. Cet effet est statistiquement caractérisé par une décorrélation des fluctuations de phase par bouillonnement (dans le référentiel se déplaçant avec la couche turbulente). La covariance temporelle des fluctuations de phase est donnée par

$$R_\varphi(\tau) = 2 \int_0^\infty d\nu \omega_\varphi(\nu)|_{\nu \geq 0} \cos\{2\pi\nu\tau\} \quad (5.35)$$

Pour que l'anticipation sur les déformations du front d'onde soient efficaces, il faut que le front d'onde ne varie pas par bouillonnement. On peut voir d'après la figure 5.3 que les fluctuations de phase se décorrélaient très rapidement (en un temps inférieur à 1 s) dans le temps, plus ou moins rapidement d'ailleurs selon les valeurs de la constante de bouillonnement ν_0 . Le domaine de validité de l'optique adaptative prédictive est donc très sensible au bouillonnement de la turbulence optique et est sévèrement limité par celle-ci.

5.5 La variation temporelle de la turbulence optique par bouillonnement et déplacement horizontal simultanés

Dans le cas le plus général, la turbulence bouillonne pendant qu'elle se déplace par rapport au champ de vision de l'observateur. Il en est de même pour

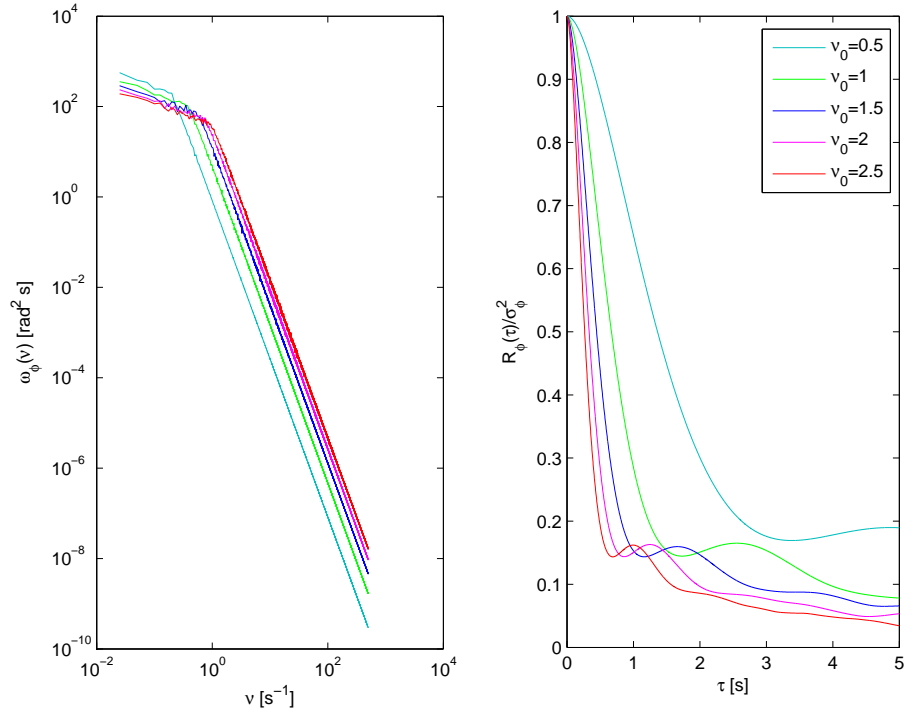


FIG. 5.3 – La figure de droite représente des fonctions de covariance temporelle $R_\phi(\tau)$ normalisées par la variance des fluctuations de phase lorsque celles-ci, contribution d'une couche turbulente donnée, sont associées à un référentiel se déplaçant avec la couche turbulente et ne subissent ainsi que la variation temporelle par bouillonnement seul. La figure de gauche représente les densités spectrales temporelles correspondantes $\omega_\phi(\nu)|_{\nu \geq 0}$. Dans ce cas simple on a négligé les effets de la diffraction et de l'échelle interne. On a considéré les valeurs de la constante de bouillonnement ν_0 (en $\text{m}^{2/3} \text{s}^{-1}$) comme étant du même ordre de grandeur que celles déduites [18] des mesures obtenues avec le senseur de front d'onde Shack-Hartmann [160]. Pour l'échelle externe on a considéré $L_0=10$ m. Le code d'intégration numérique pour cet exemple est donné dans l'annexe A.

la turbulence optique. Nous introduisons les deux effets dans l'évolution temporelle d'une composante spectrale spatiale de l'observable fluctuante $X(\vec{r}, t)$, ce qui nous donne l'expression

$$X(\vec{r}, t) = \sqrt{2} \int d\vec{f} \bar{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} [\vec{r} - \vec{v}[t - t_0]] \right\} \\ \times \cos \left\{ 2\pi \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)[t - t_0] + \phi_b(\vec{f}) \right\} \quad (5.36)$$

La composante spectrale spatiale se comporte comme une onde se déplaçant à une vitesse relative \vec{v} et dont l'amplitude oscille à la fréquence temporelle de bouillonnement $\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$ correspondant à la fréquence spatiale \vec{f} . Si l'observateur se déplace à la même vitesse que la couche turbulente alors pour lui la variation temporelle de la turbulence optique ne dépend que du bouillonnement propre. Le déplacement de la couche turbulente dans le champ de vision de l'observateur est un effet relatif et le bouillonnement de la turbulence optique est un effet intrinsèque. En effet, tout ce qu'on fait c'est déplacer l'onde stationnaire décrite dans l'équation 5.21 par rapport à l'observateur en y introduisant une translation uniforme à la vitesse \vec{v} .

Encore une fois, le caractère aléatoire (*randomness*) de la phase $\phi_b(\vec{f})$, associé au caractère aléatoire de la phase de $\bar{X}(\vec{f}, t_0)$ ainsi qu'à l'amplitude de celle-ci assure que les contributions temporelles de toutes les composantes spatiales sont à amplitude et à phase aléatoires, assurant ainsi le caractère aléatoire et l'imprédictibilité temporelle de $X(\vec{r}, t)$.

5.5.1 Les densités spectrales temporelles dans le cas de bouillonnement et déplacement horizontal

On a vu que chaque composante spectrale peut être représentée comme une onde stationnaire (modulation de l'amplitude) à laquelle est imprimée une translation uniforme. En décomposant la contribution oscillante propre en ondes se déplaçant en des sens opposés comme précédemment, on obtient aussi pour l'équation 5.36 la forme

$$X(\vec{r}, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\vec{f} \bar{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ -i\phi_b(\vec{f}) \right\} \\ \times \exp \left\{ 2\pi i \left[\vec{f} \vec{r} - [\vec{f} \vec{v} + \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)] [t - t_0] \right] \right\} \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\vec{f} \bar{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ i\phi_b(\vec{f}) \right\} \\ \times \exp \left\{ 2\pi i \left[\vec{f} \vec{r} - [\vec{f} \vec{v} - \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)] [t - t_0] \right] \right\} \quad (5.37)$$

La combinaison de l'identification fréquentielle du bouillonnement seul avec le déplacement relatif de la couche de turbulence fait apparaître deux fréquences

temporelles $\vec{f} \vec{v} + \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$ et $\vec{f} \vec{v} - \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$ issues du couplage des fréquences du bouillonnement à celles de la translation relative. Chaque composante spatiale partage son énergie entre deux contributions temporelles à ces deux fréquences.

Avec la définition des composantes spectrales temporelles dans l'équation 5.8, on peut isoler la contribution d'une fréquence ν donnée. En conjonction avec l'équation précédente on obtient

$$\begin{aligned} & \underline{X}(\nu, \vec{r}) d\nu = \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\nu=\vec{f} \vec{v} + \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} \overline{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} \vec{r} - i\phi_b(\vec{f}) \right\} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\nu=\vec{f} \vec{v} - \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} \overline{X}(\vec{f}, t_0) \exp \left\{ 2\pi i \vec{f} \vec{r} + i\phi_b(\vec{f}) \right\} \quad (5.38) \end{aligned}$$

Le premier terme de l'addition est une intégrale dans l'espace des fréquences spatiales selon toutes les fréquences \vec{f} qui vérifient $\nu = \vec{f} \vec{v} + \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$ si elles existent. Il en est de même pour le deuxième terme avec les fréquences spatiales qui vérifient $\nu = \vec{f} \vec{v} - \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)$.

Pour une fréquence temporelle ν donnée, les chemins d'intégration des deux intégrales sont différents. On intègre des contributions spatiales aléatoires différentes. Elle sont donc statistiquement indépendantes. Ceci permet d'obtenir la densité spectrale temporelle $\omega_{X(\vec{r})}(\nu)$ qui est donnée par

$$\begin{aligned} \omega_{X(\vec{r})}(\nu) d\nu &= \frac{1}{2} \int_{\nu=\vec{f} \vec{v} + \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} W_{X(t_0)}(\vec{f}) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\nu=\vec{f} \vec{v} - \nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} W_{X(t_0)}(\vec{f}) \quad (5.39) \end{aligned}$$

Le calcul de la densité spectrale dans ce cas fait appel à une approche numérique car le chemin d'intégration est compliqué.

La méthode de résolution numérique est décrite dans la section suivante [18]. C'est la même chose que ce qui est décrit pour le cas très simple dans l'annexe A sauf que l'intégration dans l'espace des fréquences spatiales s'effectue non pas à une mais à deux dimensions. Le principe de l'intégration numérique reste néanmoins le même.

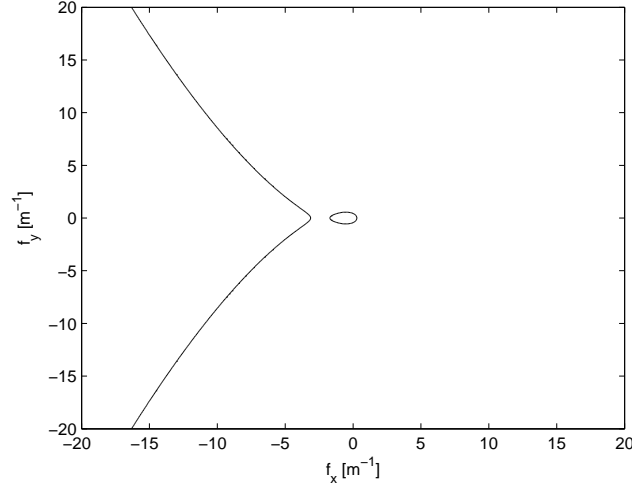


FIG. 5.4 – Chemin d'intégration dans l'espace des fréquences spatiales dans le cas où l'on a pris $\nu = v f_x + \nu_0 f^{2/3}$ (le vent dans la direction x) où $v=1 \text{ m s}^{-1}$, $\nu_0=2 \text{ m}^{2/3} \text{ s}^{-1}$, et $\nu=1.15 \text{ m}^{-1}$.

5.5.2 Modelling the optical turbulence boiling and its effects on finite-exposure differential image motion

Cet article [18] publié dans the *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* est une application directe de la modélisation proposée dans ce chapitre de la variation temporelle de l'optique adaptative dans le cas de l'astrométrie différentielle monopupille. Les fluctuations observables sont celles des angles d'arrivée différentiels. Il est à noter toutefois que dans cet article il n'est mentionné que l'utilisation de la relation d'identification des fréquences spatiales et temporelles pour une turbulence optique se produisant à l'intérieur du domaine inertiel de turbulence. La relation d'identification fréquentielle généralisée donne des mesures plus exactes.

Modelling the optical turbulence boiling and its effect on finite-exposure differential image motion

A. Berdja^{1,2★} and J. Borgnino^{2★}

¹CRAAG, BP 63, Route de l'Observatoire, 16340 Bouzaréah, Alger, Algeria

²LUAN-UMR 6525, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose F-06108 Nice Cedex 2, France

Accepted 2007 April 13. Received 2007 April 12; in original form 2006 October 11

ABSTRACT

It is usually accepted that whenever dealing with astronomical observation through the atmosphere, the optical turbulence temporal evolution can be sufficiently described with the so-called frozen turbulence hypothesis. In this model, turbulence is supposed to be equivalent to a series of solid phase screens that slide horizontally in front of the observation field of view. Experimental evidence shows, however, that an additional physical process must be taken into account when describing the temporal behaviour of the optical turbulence. In fact, while translating above the observer, turbulence undergoes a proper temporal evolution and affects differently the astronomical and, more specifically, the astrometric observations. The proper temporal evolution of the turbulence-induced optical turbulence observable quantities is here called the optical turbulence boiling. We are proposing through this paper a theoretical approach to the modelling of the optical turbulence temporal evolution when the turbulent layer horizontal translation and the optical turbulence boiling are both involved. The model we propose, as a working hypothesis though, has a direct relevance to differential astrometry because of its explicit dependence upon the optical turbulence temporal evolution. It can also be generalized to other techniques of high angular resolution astronomical observation through the atmospheric turbulence.

Key words: turbulence – atmospheric effects – techniques: high angular resolution – astrometry – planetary systems.

1 INTRODUCTION

One of the most exciting astronomical activities nowadays is incontestably the detection of extra-solar planetary systems. For this purpose, and in parallel to direct imaging developments (Chauvin et al. 2005), many indirect observation methods are being developed. Astrometry, complementarily to radial velocity surveys, appears to be a promising technique for exoplanet detection through its capability to determine planetary masses and long-period orbits (McAlister 1996; Pravdo & Shaklan 1996; Launhardt 2005). The accuracies needed today for detecting the astrometric signature of the apparent star position perturbation that is induced by an orbiting planet in a nearby system are of the order of a few microarcseconds if not less (Sozzetti 2005). In order to detect these astrometric signatures, space and ground-based astrometric programmes are being developed (Casertano et al. 1996; Lattanzi et al. 2000; Sozzetti et al. 2003). The most straightforward direction for ground-based astrometry to achieve such precisions is probably related to infrared long-baseline interferometry (Shao & Colavita 1992; Lane & Mutterspaugh 2004).

It appears, however, that with appropriate field averaging and data reduction (Pravdo & Shaklan 1996), an appropriate apodization of the entrance pupil and a virtually enhanced symmetrization of the reference field (Lazorenko & Lazorenko 2004; Lazorenko 2006), it is still possible to achieve very acceptable astrometric accuracies with mono-aperture telescopes (Gatewood 1987; Anderson et al. 2006) in relatively good seeing conditions.

Ground-based astrometry, like the other optical and infrared high angular resolution observation techniques, is strongly contaminated by the atmospheric optical turbulence. A long-exposure observation regime is therefore performed in order to induce a time averaging of the apparent instantaneous turbulence-induced image motion over the telescope field of view. For a given exposure time, the astrometric accuracy depends mostly upon how fast the optical turbulence evolves over time (Lindgren 1980). We find it important therefore to accurately model the optical turbulence temporal evolution and its effect on finite-exposure image motion in order to have the ability to perform the astrometrical measurements in the most suitable conditions.

The optical turbulence temporal evolution is usually modelled with the so-called frozen turbulence hypothesis or the Taylor hypothesis (Tatarskii 1971; Conan, Rousset & Madec 1995; Avila

★E-mail: berdja@unice.fr (AB); borgnino@unice.fr (JB)

et al. 1997). The optical turbulence horizontal transportation has been observed for a long time (Vernin & Roddier 1973) and a model of multilayered frozen and translating turbulent layers has been developed (Roddier, Gilli & Lund 1982) for the purpose of studying the turbulence-induced speckle image temporal evolution (Aime, Kadir & Ricort 1980; Aime et al. 1986; Vernin et al. 1991) and how to monitor it (Lopez 1992). It is still in use also to model speckle statistics in adaptively corrected images (Fitzgerald & Graham 2006). This multilayered approach is usually called ‘speckle boiling’. This denomination is due to the visual effect it induces on the speckle image temporal evolution and has nothing to do with the optical turbulence boiling we are describing in this paper. The frozen turbulence hypothesis is based upon the belief that for short exposure times, wavefronts do not deform but translate uniformly as the wind blows. This is equivalent, relatively to the optical effect that is induced, to moving solid diffusers illuminated using laser beams. It leads to a relatively simple theoretical description of the optical turbulence temporal evolution and how it is decorrelated over time (Conan et al. 1995). However, a closer look via dedicated experiments (St-Jacques 1998; Schöck & Spillar 1999) has given a new insight into the limits of the frozen turbulence hypothesis. It appears that this approximation is valid only for exposures lower than a few tens of milliseconds (St-Jacques & Baldwin 2000; Schöck & Spillar 2000) and that the optical turbulence temporal evolution cannot be described only by wavefront horizontal translation as it is usually supposed. This limit was also noted before (Gendron & Léna 1996). In fact, while translating in front of the telescope field of view, the optical turbulence undergoes a proper temporal evolution, which for a stationary observer superposes on that evolution produced by the horizontal transportation. This proper temporal evolution is to be referred to as the optical turbulence boiling.

A more appropriate modelling of the properties of the optical turbulence temporal evolution not only is relevant for long exposures as in astrometric surveys but also matters in some other high angular resolution techniques. For example, optimizing the response of adaptive optical systems depends upon the short time-scale over which the turbulence-induced optical wavefront pattern evolves. The deterministic aspect of the horizontal frozen and translating turbulent layers might also allow making predictions on the evolution of the wavefront pattern and thus making adaptive optics more efficient. The optical turbulence temporal evolution is also significant for long-baseline interferometry (Kellerer & Tokovinin 2007). It appears then that the validity of the frozen turbulence hypothesis as well as the influence of the optical turbulence boiling deserves to be discussed.

The major aim of the present paper is to propose a theoretical approach that permits modelling the optical turbulence temporal evolution when the optical turbulence boiling and the turbulence layer horizontal translating are both involved. We emphasize modelling the finite-exposure differential image motion because of its significance for astrometry and for the other techniques of high angular resolution imaging. The model can be easily generalized to other observable quantities as well.

2 FINITE-EXPOSURE DIFFERENTIAL IMAGE MOTION

When propagating through the atmosphere, light from outer space encounters a medium with a randomly distributed and time-changing refractive index field. This inhomogeneity is due to the omnipresent turbulence in the air. The different areas of an incoming wavefront are unequally slowed down by the refraction index field

and thus undergo phase and amplitude fluctuations (Tatarskii 1971). When diffraction occurs at the entrance pupil of a telescope and light is focused on an imaging detector, the instantaneous point spread function, which is the image obtained when a single unresolved star is observed, usually exhibits a speckled distribution rather than a single airy spot. This image is also shifted from its real position and as time passes by, its instantaneous position fluctuates around its average turbulence-free position. We do not discuss here the systematic errors like the differential chromatic refraction (Gubler & Tytler 1998), but we focus on the optical turbulence effects only. Image motion is due to the turbulence-induced angular deviations of light from its initial direction of incidence. It is proportional to the normalized averaging of the local wavefront slopes over the entrance pupil where they are weighted by the instantaneous intensity fluctuations resulting from scintillation (Tatarskii 1971).

Let $\alpha_1(t)$ and $\alpha_2(t)$ be the one-dimensional components along an arbitrary direction of the instantaneous angular motion of the images of two stars 1 and 2. One of them may be the target star under investigation and the other may be any of the reference stars in the field of view. Instantaneous differential image motion along that same direction is given by the difference $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ of the instantaneous departures $\alpha_1(t)$ and $\alpha_2(t)$ from the real positions of the stars as they should be measured without optical turbulence.

In the following, mono-directional differential image motion refers to the one-dimensional component of the two-dimensional differential image motion along a given orientation. The astrometric error can be defined as the rms of the long-exposure two-dimensional differential image motion. It can be easily obtained, for example, from the statistical variance of long-exposure mono-directional differential image motion taken along two arbitrary orthogonal orientations. In the following, we will focus, however, on the statistics of the finite-exposure mono-directional differential image motion.

In order to minimize the differential image motion effect on the angular separation measurements, a long-exposure measurement is performed in order to induce sufficient averaging on the instantaneous turbulence-induced motions. Because time averaging is finite, there always remains a residual differential image motion (Lindgren 1980).

If $\Delta\alpha_{\text{res}}(T)$ is the residual mono-directional differential image motion after an averaging over a finite-exposure time T , then we write

$$\Delta\alpha_{\text{res}}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dt [\alpha_1(t) - \alpha_2(t)], \quad (1)$$

where $\Delta\alpha_{\text{res}}(T)$ is simply the finite-exposure measurement of the mono-directional differential image motion $\alpha_1 - \alpha_2$ over an exposure time T . It is a random quantity with zero mean like $\alpha_1(t)$ and $\alpha_2(t)$. We will characterize it by its statistical variance σ_T^2 that is given by

$$\sigma_T^2 = \langle |\Delta\alpha_{\text{res}}(T)|^2 \rangle, \quad (2)$$

where $\langle \dots \rangle$ denotes ensemble averaging as if finite-exposure measurements were repeated infinitely with the same conditions of optical turbulence.

The statistical variance of the finite-exposure differential image motion can therefore be developed into

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T \frac{dt dt'}{T^2} \langle [\alpha_1(t) - \alpha_2(t)][\alpha_1(t') - \alpha_2(t')] \rangle. \quad (3)$$

The quantity that appears in the double integral is the temporal covariance $R_{\Delta\alpha}(t - t')$ of the instantaneous differential image motion. As it depends only upon the time difference $\tau = t - t'$, the

double integral can be reduced into a single integral relatively to the variable τ . We have thus

$$\sigma_T^2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T d\tau [T - \tau] R_{\Delta\alpha}(\tau). \quad (4)$$

We can already see in this expression that the astrometrical error via the residual mono-directional differential image motion variance depends upon the statistical properties of the temporal evolution of the optical turbulence, which is expressed here through the temporal covariance of the instantaneous mono-directional differential image motion.

The temporal covariance $R_{\Delta\alpha}(\tau)$ is directly related by a Fourier transform to the temporal power spectral density $\omega_{\Delta\alpha}(\nu)$ of the instantaneous mono-directional differential image motion where ν denotes a temporal frequency. The temporal power spectral density is a positive and pair function so that one directly writes

$$R_{\Delta\alpha}(\tau) = 2 \int_0^\infty d\nu \omega_{\Delta\alpha}(\nu) \cos\{2\pi\nu\tau\}. \quad (5)$$

The variance of the finite-exposure mono-directional differential image motion is then obtained with

$$\sigma_T^2 = \frac{4}{T^2} \int_0^T d\tau [T - \tau] \int_0^\infty d\nu \omega_{\Delta\alpha}(\nu) \cos\{2\pi\nu\tau\}. \quad (6)$$

One has, thus, to determine the temporal power spectral density of the instantaneous differential image motion in order to characterize long-exposure measurements.

While the modelling of the temporal statistical properties of the optical turbulence quantities is based upon the temporal power spectral density, the optical turbulence properties are most often described by the two-dimensional spatial power spectral density. In all the following, we will describe the effects induced by a single equivalent turbulent layer at a given altitude. We will also ignore the polychromatic effects on mono-directional differential image motion statistics (Berdja, Borgnino & Irbah 2006) and consider just the monochromatic case. If the optical turbulence obeys the von K rm n (Borgnino 1990; Borgnino, Martin & Ziad 1992) and Hill-Andrews models (Innocenti & Consortini 2004; Jolissaint, V ran & Conan 2006), then the instantaneous differential image motion spatial power spectral density $W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f})$, where \mathbf{f} is a two-dimensional spatial frequency vector, is given by

$$\begin{aligned} W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}) = & 0.7654 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos\{\varepsilon\}} \right] f_x^2 [f^2 + L_0^{-2}]^{-11/6} \\ & \times \left[\frac{2DJ_1\{\pi Df\} - 2D'J_1\{\pi D'f\}}{\pi[D^2 - D'^2]f} \right]^2 \cos\{\pi\lambda hf^2\} \\ & \times [1 + 3.4310fl_0 - 0.5384[fl_0]^{7/6}] \exp\{-3.6252[fl_0]^2\} \\ & \times [1 - \cos\{2\pi hf\Theta\}], \end{aligned} \quad (7)$$

with $\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j}$.

$\Theta = \Theta_x \mathbf{i} + \Theta_y \mathbf{j}$ is the two-dimensional angular separation between the two stars in the sky (Fig. 1), C_n^2 the constant structure for refractive index fluctuations, δh the turbulent layer thickness, ε the average zenith angle, L_0 the outer scale of the optical turbulence (Borgnino 1990; Borgnino et al. 1992), l_0 the inner scale (Innocenti & Consortini 2004), D the diameter of the circular entrance pupil of the telescope, D' the diameter of the circular central obstruction, λ the light wavelength and h the altitude of the turbulent layer above the instrument. We have assumed here that the one-dimensional component of the differential image motion is oriented along the x -axis. The geometrical configuration is summarized in Fig. 1.

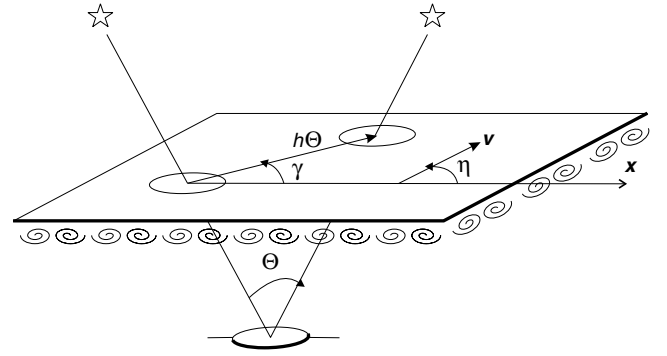


Figure 1. The plane surface in this diagram represents a horizontal turbulent layer at an altitude h above the ground-based telescope which is represented here by its entrance circular pupil downside. Two unresolved stars with angular separation Θ are observed and the intersections of the lines of sight with the turbulent layer draw a baseline $h\Theta$ which can be viewed as a projection of the angular separation. In the figure, the x -axis denotes the orientation along which the one-dimensional component of image motion is considered. The relative angle of the baseline to the image motion component is denoted by γ . The relative angle of the turbulence translation velocity v to the image motion component is denoted by η .

We should note here that one could obtain straightforward results for the long-exposure two-dimensional differential image motion from the following model just by replacing the term f_x^2 by f^2 in equation (7). Applications to some other optical turbulence observable quantities can be obtained by entering the appropriate spatial power spectral densities instead of the one expressed in the previous equation.

We will discuss in the following sections how to derive temporal power spectral densities from spatial power spectral densities in order to model the temporal statistical properties of the optical turbulence and their influence on high angular resolution techniques.

3 THE OPTICAL TURBULENCE TEMPORAL EVOLUTION PROCESSES

From the observational viewpoint, we can classify the optical turbulence temporal evolution according to two main phenomenological processes.

(i) A chaotic dynamical evolution, due to the very intrinsic nature of fluid turbulence, which causes what we have designated as the optical turbulence boiling. This process can be schematically described as being due to the fact that inside a turbulent layer, the relative spatial configuration of eddies at all available scales does change over time.

(ii) An apparent evolution that is due to the relative horizontal translation of the turbulent layer relatively to the observer. For a given line of sight, light experiences different parts of the turbulent layer over time.

We will first review the analytical modelling of the temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion when horizontal translation occurs alone without any proper boiling. This is the well-known frozen turbulence hypothesis. We present then an analytical modelling of the temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion when the optical turbulence boiling occurs alone. In the following section, we present a more general approach to model the temporal power spectral density of the

mono-directional instantaneous differential image motion when the turbulent layer horizontal translation and the optical turbulence boiling occur together.

4 THE FROZEN TURBULENCE HYPOTHESIS

In this approximation, we consider that the optical turbulence temporal evolution is dominated by the translational effect as if the turbulence spatial pattern was frozen and entirely translated by the wind with a constant velocity \mathbf{v} . The frozen turbulence hypothesis is valid for a limited time beyond which we could consider that the optical turbulence boiling could become sufficiently important to induce additive temporal decorrelation.

Let $\Delta\alpha(\mathbf{r}, t)$ be an instantaneous spatial distribution of the x -oriented mono-directional differential image motion as measured through a ground-based telescope, where $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ is a two-dimensional position vector.

At an arbitrary initial instant $t = 0$, one can write

$$\Delta\alpha(\mathbf{r}, 0) = \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \exp\{2\pi i \mathbf{f} \mathbf{r} + i\varphi_0(\mathbf{f})\}, \quad (8)$$

where $|\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)|$ is the modulus of the spatial Fourier transform of $\Delta\alpha(\mathbf{r}, 0)$. It is to be considered as a random quantity whose statistical variance gives the spatial power spectral density of the instantaneous differential image motion like the one given in equation (7). $\varphi_0(\mathbf{f})$ is a random arbitrary phase with $0 < \varphi_0(\mathbf{f}) \leq 2\pi$. We might recall here that $\Delta\alpha(\mathbf{r}, 0)$ is a random and unpredictable spatial distribution whose Fourier transform has random spatial frequency-distributed modulus $|\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)|$ and phase $\varphi_0(\mathbf{f})$. Only reproducible are the statistical quantities like the spatial power spectrum $W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f})$, which is given by $W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}) = \langle |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)|^2 \rangle$.

During a finite duration t , the whole turbulence is translated along a distance $\mathbf{v}t$ where \mathbf{v} is still the velocity vector of the turbulence translation. At an instant t , the observed optical turbulence pattern through a fixed line of sight at a position \mathbf{r} is the same pattern that was observed according to that same line of sight but at a position $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$ at the instant $t = 0$. According to the frozen turbulence hypothesis, we can then write

$$\Delta\alpha(\mathbf{r}, t) = \Delta\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, 0). \quad (9)$$

With this translational effect, the instantaneous spatial distribution of the x -oriented mono-directional differential image motion at instant t is given by

$$\Delta\alpha(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \exp\{2\pi i \mathbf{f} [\mathbf{r} - \mathbf{v}t] + i\varphi_0(\mathbf{f})\}. \quad (10)$$

Relative to the observer, every spatial spectral component of frequency \mathbf{f} ‘oscillates’ at a temporal frequency ν that is given by

$$\nu = \mathbf{f} \mathbf{v}. \quad (11)$$

With the frozen turbulence hypothesis, there is a simple relation between spatial frequencies and temporal frequencies when the velocity of the turbulent layer translation is known. The optical turbulence with a temporal frequency ν is the result of the contributions of the optical turbulence of all the frequencies \mathbf{f} that satisfy equation (11).

Within the framework of the frozen flow hypothesis, the temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion $\omega_{\Delta\alpha}^{\text{FTH}}(\nu)$ at a temporal frequency ν is given by the sum of all the spatial power spectral densities $W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f})$ with frequencies \mathbf{f} that satisfy equation (11). We may symbolize this ‘energy

transfer-like’ relation by the following expression:

$$\omega_{\Delta\alpha}^{\text{FTH}}(\nu) d\nu = \int_{\nu=\mathbf{f}\mathbf{v}} d\mathbf{f} W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}). \quad (12)$$

In order to simplify this expression, we may choose different spatial frequency coordinates with $\mathbf{f}' = f'_x \mathbf{i}' + f'_y \mathbf{j}'$ so that \mathbf{i}' is aligned with the direction of the velocity vector \mathbf{v} . In this case, the ‘energy transfer condition’ in equation (11) writes simply $\nu = \mathbf{v} \mathbf{f}'$ where ν is the module of \mathbf{v} . We can thus obtain

$$\omega_{\Delta\alpha}^{\text{FTH}}(\nu) = \frac{1}{\nu} \int d\mathbf{f}' W_{\Delta\alpha}\left(\frac{\nu}{v}, f'_y\right). \quad (13)$$

This is achieved by a rotation of the coordinates system. If η is defined by $\mathbf{v} = v[\cos\{\eta\}\mathbf{i} + \sin\{\eta\}\mathbf{j}]$, which also means that it is the angle between the velocity direction relatively to the orientation of the chosen component of the differential image motion, then we will particularly have $f_x = f'_x \cos\{\eta\} - f'_y \sin\{\eta\}$. This is how temporal spectra are usually calculated within the framework of the frozen turbulence hypothesis (Conan et al. 1995; Avila et al. 1997).

For example, we can consider the spatial power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion as being given by

$$W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}) = 0.7654 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos\{\varepsilon\}} \right] f_x^2 [f^2 + L_0^{-2}]^{-11/6} \times \left[\frac{2J_1\{\pi D f\}}{\pi D f} \right]^2 [1 - \cos\{2\pi h \mathbf{f} \Theta\}]. \quad (14)$$

Here, diffraction and inner scale effects are neglected and the entrance pupil is circular without central obstruction.

The temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion in this case is thus given by

$$\omega_{\Delta\alpha}^{\text{FTH}}(\nu) = \frac{0.7654}{\nu} \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos\{\varepsilon\}} \right] \int d\mathbf{f}' \left[\frac{\nu}{v} \cos\{\eta\} - f'_y \sin\{\eta\} \right]^2 \times [F^2 + L_0^{-2}]^{-11/6} \left[\frac{2J_1\{\pi D F\}}{\pi D F} \right]^2 \times \left[1 - \cos \left\{ 2\pi h \Theta \left[\frac{\nu}{v} \cos\{\eta - \gamma\} - f'_y \sin\{\eta - \gamma\} \right] \right\} \right], \quad (15)$$

where $F^2 = [\frac{\nu}{v}]^2 + [f'_y]^2$ and Θ being defined with $\Theta = \Theta[\cos\{\gamma\}\mathbf{i} + \sin\{\gamma\}\mathbf{j}]$.

The temporal power spectral density depends on the relative orientations of the wind and angular separation relatively to the chosen component of differential image motion, via the angles η and γ . Fig. 2 displays, as an example, a temporal power spectral density which is calculated by numerical integration of equation (15).

5 THE OPTICAL TURBULENCE BOILING

The situation we are to describe now is the case where the turbulent layer does not translate horizontally across the observation field of view. In this case $\mathbf{v} = 0$ explicitly. We can imagine that rather than remaining indefinitely frozen, the optical turbulence will undergo a proper evolution, the optical turbulence boiling.

In order to model this effect, we will first recall some of the earliest results of the statistical modelling of turbulence.

A fully developed and stationary turbulent fluid is statistically described with the energy cascade model. In this approach, the energy flow from large spatial structures of turbulence to smaller structures

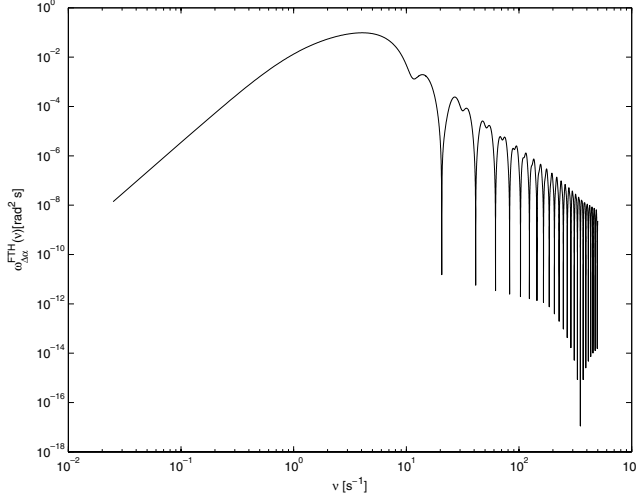


Figure 2. Plot of a temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion $\omega_{\Delta\alpha}^{\text{FTH}}(\nu)$ within the framework of the frozen turbulence hypothesis, which is calculated by numerical integration of equation (15). Here, the term $0.7654[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos[\varepsilon]}]$ is normalized to 1. $D = 1$ m, $\Theta = 10$ arcsec, $\gamma = 0$ rad, $L_0 = 10$ m, $h = 10$ km, $v = 10$ m s $^{-1}$ and $\eta = 0$ rad.

is constant. This implies through a dimensional reasoning within the framework of the Kolmogorov model that to a structure of turbulence with a given spatial characteristic length l is associated to an average velocity fluctuation u which is proportional to $l^{1/3}$ (Tatarskii 1971).

For a turbulence structure with a spatial length l , a velocity fluctuation u is characterized by its fluctuation time τ where $\tau = l/u$. This characteristic fluctuation time refers to the turbulence structure lifetime. It is an estimation of the time during which a turbulence structure appears and disappears. By replacing u by $l^{1/3}$, we have

$$\tau \propto l^{2/3}. \quad (16)$$

This describes how turbulence ‘boils’. The above proportionality gives a direct relation between temporal frequencies ν and spatial frequencies f for optical turbulence. This relation is given (Masciadri & Vernin 1997; St-Jacques 1998) by

$$\nu \propto f^{2/3}. \quad (17)$$

We can introduce here a proportionality constant v_0 as an independent parameter that expresses how fast the optical turbulence evolves by optical turbulence boiling. In this case, we write

$$\nu = v_0 f^{2/3}. \quad (18)$$

This also gives $f = [\frac{\nu}{v_0}]^{3/2}$ and $d\nu = \frac{2v_0}{3} f^{-1/3} df$.

The spatial spectral components during the optical turbulence boiling can be viewed as resembling standing waves, each oscillating at a temporal frequency that is given by equation (18). With these considerations, the instantaneous spatial distribution of the x-oriented mono-directional differential image motion at instant t is given by

$$\Delta\alpha(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \cos\{2\pi v_0 f^{2/3} t + \varphi_b(\mathbf{f})\} \times \exp\{2\pi i \mathbf{f} \mathbf{r} + i\varphi_0(\mathbf{f})\}, \quad (19)$$

where $\varphi_b(\mathbf{f})$ is an arbitrary phase with $0 \leq \varphi_b(\mathbf{f}) < 2\pi$. The term $\sqrt{2} \cos\{2\pi v_0 f^{2/3} t + \varphi_b(\mathbf{f})\}$ expresses here the temporal modulation of the spatial spectral component of spatial frequency \mathbf{f} .

Standing waves can be decomposed into two waves travelling in opposite directions. $\Delta\alpha(\mathbf{r}, t)$ can also be rewritten in the following form:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha(\mathbf{r}, t) = & \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \\ & \times \exp\{2\pi i [\mathbf{f} \mathbf{r} - v_0 f^{2/3} t] + i[\varphi_0(\mathbf{f}) - \varphi_b(\mathbf{f})]\} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \\ & \times \exp\{2\pi i [\mathbf{f} \mathbf{r} + v_0 f^{2/3} t] + i[\varphi_0(\mathbf{f}) + \varphi_b(\mathbf{f})]\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Here, $\exp\{2\pi i [\mathbf{f} \mathbf{r} - v_0 f^{2/3} t] + i[\varphi_0(\mathbf{f}) - \varphi_b(\mathbf{f})]\}$ and $\exp\{2\pi i [\mathbf{f} \mathbf{r} + v_0 f^{2/3} t] + i[\varphi_0(\mathbf{f}) + \varphi_b(\mathbf{f})]\}$ are the expressions of the travelling waves in the spatial frequency domain whose interference produces the standing waves of the optical turbulence boiling.

We can see that every spatial frequency \mathbf{f} leads to an equal partition of the optical turbulence energy into two temporal frequencies $\nu = v_0 f^{2/3}$ and $\nu = -v_0 f^{2/3}$. As a consequence, the temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion $\omega_{\Delta\alpha}^{\text{boil}}(\nu)$ is given by the following energy transfer-like expression:

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta\alpha}^{\text{boil}}(\nu) d\nu = & \frac{1}{2} \int_{\nu=v_0 f^{2/3}} d\mathbf{f} W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\nu=-v_0 f^{2/3}} d\mathbf{f} W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}). \end{aligned} \quad (21)$$

The first integral in equation (21) deals with the positive temporal frequencies while the second integral deals with the negative ones. The temporal power spectral density is a pair function so that calculating one of the integrals is sufficient to obtain the other by symmetry. We choose to consider the positive temporal frequency part:

$$\omega_{\Delta\alpha}^{\text{boil}}(\nu; \nu > 0) d\nu = \frac{1}{2} \int_{\nu=v_0 f^{2/3}} d\mathbf{f} W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}). \quad (22)$$

Let us consider, for example, the simplified spatial power spectral density from equation (14). We suppose that the optical turbulence boiling relation between temporal and spatial frequencies in equation (18) is still valid beyond the inertial range even if initially derived from the Kolmogorov model.

We may reexpress this spatial power spectral density in polar coordinates (f, θ_f) where f is the radial spatial frequency and θ_f the polar spatial frequency. With equation (18) in mind, we can then rewrite the temporal power spectral density in the following manner:

$$\omega_{\Delta\alpha}^{\text{boil}}(\nu; \nu > 0) = \frac{3}{4v_0} \frac{\nu^2}{v_0^2} \int_0^{2\pi} d\theta_f W_{\Delta\alpha} \left(\left[\frac{\nu}{v_0} \right]^{3/2}, \theta_f \right). \quad (23)$$

Otherwise, equation (14) becomes

$$\begin{aligned} W_{\Delta\alpha}(f, \theta_f) = & 0.7654 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos[\varepsilon]} \right] [f \cos\{\theta_f\}]^2 [f^2 + L_0^{-2}]^{-11/6} \\ & \times \left[\frac{2J_1\{\pi D f\}}{\pi D f} \right]^2 [1 - \cos\{2\pi h f \Theta \cos\{\theta_f - \gamma\}\}], \end{aligned} \quad (24)$$

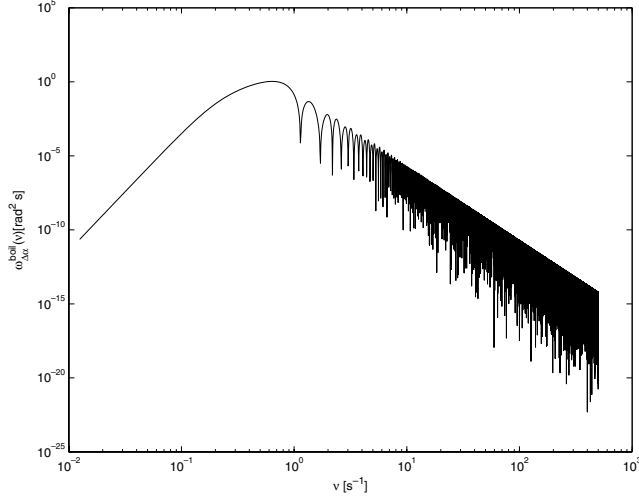


Figure 3. Plot of a temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion $\omega_{\Delta\alpha}^{\text{boil}}(\nu)$ within the framework of the optical turbulence boiling model, which is calculated from equation (26). Here, the term $0.7654[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos\{\epsilon\}}]$ is normalized to 1. $D = 1$ m, $\Theta = 10$ arcsec, $\gamma = 0$ rad, $L_0 = 10$ m, $h = 10$ km and $\nu_0 = 1$.

and by replacing $W_{\Delta\alpha}(f, \theta_f)$ in equation (23) we obtain

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta\alpha}^{\text{boil}}(\nu; \nu > 0) &= \frac{3}{4\nu_0} \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^2 0.7654 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos\{\epsilon\}} \right] \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^3 \\ &\times \left[\left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^3 + L_0^{-2} \right]^{-11/6} \left[\frac{2J_1\{\pi D [\frac{\nu}{\nu_0}]^{3/2}\}}{\pi D [\frac{\nu}{\nu_0}]^{3/2}} \right]^2 \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta_f \cos^2\{\theta_f\} [1 - \cos\{2\pi h f \Theta \cos\{\theta_f - \gamma\}\}]. \end{aligned} \quad (25)$$

The latter integral over the polar spatial frequency is easily solvable.

The positive temporal frequency part of the temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion in this case is then given by

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta\alpha}^{\text{boil}}(\nu; \nu > 0) &= \frac{3\pi}{4\nu_0} 0.7654 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos\{\epsilon\}} \right] \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^5 \\ &\times \left[\left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^3 + L_0^{-2} \right]^{-11/6} \left[\frac{2J_1\{\pi D [\frac{\nu}{\nu_0}]^{3/2}\}}{\pi D [\frac{\nu}{\nu_0}]^{3/2}} \right]^2 \\ &\times \left[1 - J_0\left\{2\pi h \Theta \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{3/2}\right\} + \cos\{2\gamma\} J_2\left\{2\pi h \Theta \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^{3/2}\right\} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

The negative temporal frequency part of the temporal power spectral density is obtained by the same operations. The result is numerically the same.

Fig. 3 displays, as an example, a temporal power spectral density which is plotted from equation (26).

5.1 The optical turbulence boiling constant

It is possible to make an estimate of the numerical order of magnitude of the optical turbulence boiling constant ν_0 from experimental data. For example, a technique to test the frozen turbulence hypothesis quantitatively using data from wavefront sensors has

been developed (Schöck & Spillar 2000; St-Jacques & Baldwin 2000). In these experiments, the quantity of interest is mainly the spatio-temporal autocorrelation function of the mono-directional image motions measured through the subapertures of the wavefront sensor.

In order to interpret such results in a simple manner, we may consider distant subapertures whose relative position matches the wind direction in case of a single turbulent layer. We consider two subapertures a and b which are separated by a given distance L . The turbulence features that cross the line of sight of subaperture a reach the line of sight of subaperture b after a time interval whose duration is L/v , where v is still the velocity of the turbulent layer horizontal translation.

In the case of total validity of the frozen turbulence hypothesis, mono-directional image motion at subaperture b at instant t is exactly the same as mono-directional image motion measured at subaperture a at instant $t - L/v$. This means that the spatio-temporal covariance of mono-directional image motion at distance L and time interval L/v is given by the variance of mono-directional image motion anywhere. Now if during its travel from subaperture a to subaperture b turbulence undergoes proper evolution, then the spatio-temporal covariance of mono-directional image motion at distance L and time interval L/v is given by the temporal covariance of mono-directional image motion at time interval L/v , where only the optical turbulence boiling is involved.

It appears that the time interval for which the temporal covariance (of the mono-directional image motion variance) reaches half its maximum is typically of the order of 50 to 100 ms for most available data sets (Schöck & Spillar 2000). With this, we can evaluate the typical values of the optical turbulence boiling constant.

Following the same operations as for the mono-directional differential image motion in Section 5, the simplified temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional image motion measured through circular subapertures when only the optical turbulence boiling occurs is given by

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}^{\text{boil}}(\nu; \nu > 0) &= \frac{3\pi}{4\nu_0} 0.3827 \left[\frac{C_n^2 \delta h}{\cos\{\epsilon\}} \right] \left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^5 \\ &\times \left[\left[\frac{\nu}{\nu_0} \right]^3 + L_0^{-2} \right]^{-11/6} \left[\frac{2J_1\{\pi D [\frac{\nu}{\nu_0}]^{3/2}\}}{\pi D [\frac{\nu}{\nu_0}]^{3/2}} \right]^2. \end{aligned} \quad (27)$$

The temporal covariance $R_{\alpha}(\tau)$ for a time interval τ relates to it by

$$R_{\alpha}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} d\nu \omega_{\alpha}^{\text{boil}}(\nu; \nu > 0) \cos\{2\pi\nu\tau\}. \quad (28)$$

For various values of ν_0 , we can calculate the time interval t_{50} (Schöck & Spillar 2000) for which $R_{\alpha}(t_{50}) = \frac{1}{2} R_{\alpha}(0)$ with the previous equations. We then find an approximate relationship between the experimental results t_{50} and the possibly related optical turbulence boiling constant ν_0 in the following simple form:

$$\nu_0 \approx [9.84 t_{50}]^{-1}. \quad (29)$$

We have assumed the near-field approximation for the optical turbulence by neglecting diffraction and scintillation and we have assumed an arbitrary value $L_0 = 10$ m for the outer scale as a plausible order of magnitude. The diameter of the subapertures is $D = 10$ cm.

t_{50} varies between 50 and 100 ms in the data we have considered. The optical turbulence boiling constant ν_0 then varies between approximately 2 and 1. This gives us an order of magnitude for ν_0

even if we have not yet enough data for the amplitude of variations of this parameter.

6 THE TRANSLATING-AND-BOILING OPTICAL TURBULENCE MODEL

In the most general case, turbulence layer boils while translating horizontally above the observer. We propose in the following a theoretical approach to model the optical turbulence temporal evolution when the optical turbulence boiling and the turbulence layer horizontal translation above the observer are simultaneously involved.

We recall that $\Delta\alpha(\mathbf{r}, t)$ is an instantaneous spatial distribution of the x-oriented mono-directional differential image motion as measured through a ground-based telescope. At a given initial instant $t = 0$, it is given by equation (8).

As stated before, each spectral component with spatial frequency \mathbf{f} oscillates at a temporal frequency $\nu_0 f^{2/3}$. Simultaneously, the same spatial spectral components of the optical turbulence translate at a velocity \mathbf{v} .

By applying the same modelling of the horizontal translation as in equation (10) and the same modelling of the optical turbulence boiling as in equation (19), the instantaneous spatial distribution of the x-oriented mono-directional differential image motion at instant t can be expressed as

$$\Delta\alpha(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \cos \{2\pi\nu_0 f^{2/3}t + \varphi_b(\mathbf{f})\} \times \exp\{2\pi i \mathbf{f}[\mathbf{r} - \mathbf{v}t] + i\varphi_0(\mathbf{f})\}, \quad (30)$$

where $\varphi_0(\mathbf{f})$ and $\varphi_b(\mathbf{f})$ are arbitrary phases.

For the observer, the temporal behaviour of a given spatial spectral component is thus that of an oscillation at a given temporal frequency which is modulated by an oscillation at another temporal frequency.

We can rewrite $\Delta\alpha(\mathbf{r}, t)$ from equation (30) into the following form:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha(\mathbf{r}, t) = & \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \\ & \times \exp \{2\pi i [\mathbf{f}\mathbf{r} - [\mathbf{f}\mathbf{v} + \nu_0 f^{2/3}]t] + i[\varphi_0(\mathbf{f}) - \varphi_b(\mathbf{f})]\} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\mathbf{f} |\overline{\Delta\alpha}(\mathbf{f}, 0)| \\ & \times \exp \{2\pi i [\mathbf{f}\mathbf{r} - [\mathbf{f}\mathbf{v} - \nu_0 f^{2/3}]t] + i[\varphi_0(\mathbf{f}) + \varphi_b(\mathbf{f})]\}. \end{aligned} \quad (31)$$

We can see here that every spatial frequency \mathbf{f} leads to an equal partition of the optical turbulence energy into two temporal frequencies $\nu = \mathbf{f}\mathbf{v} + \nu_0 f^{2/3}$ and $\nu = \mathbf{f}\mathbf{v} - \nu_0 f^{2/3}$.

Consequently, the temporal power spectral density $\omega_{\Delta\alpha}(\nu)$ of the x-oriented differential image motion is given by the following energy transfer expression:

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta\alpha}(\nu)d\nu = & \frac{1}{2} \int_{\nu=\mathbf{f}\mathbf{v}+\nu_0 f^{2/3}} d\mathbf{f} W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\nu=\mathbf{f}\mathbf{v}-\nu_0 f^{2/3}} d\mathbf{f} W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f}). \end{aligned} \quad (32)$$

Resolving this equation is not as straightforward as it is when dealing with boiling or horizontal translation effects separately. We did not find an analytic solution to equation (32), so we treated it numerically. There are two complementary approaches to take benefit from this model. One may need for instance to numerically simulate a time series of instantaneous measurements. We present

in Section 6.1 a method for numerically simulating the optical turbulence temporal evolution as presented in this section and in the previous one. Section 6.2 presents a numerical procedure to obtain a good estimation of the temporal power spectral densities of the instantaneous x-oriented mono-directional differential image motion and other optical turbulence quantities.

6.1 Monte Carlo numerical simulation of the optical turbulence boiling

The above analytical modelling has a direct applicability. It provides a simple way to simulate the temporal evolution of spatial (or angular) distributions of optical turbulence observable quantities through the field of view of a telescope. When applied to phase and amplitude fluctuations, it can have a direct relevance for adaptive optics studies for example (Vogel 2006). We introduce in the following the general principles of a simulation of differential image motion while keeping in mind that the procedure is exactly the same for phase, amplitude or differential piston fluctuations to give a few examples.

A spatial two-dimensional distribution of differential image motion at an arbitrary instant $t = 0$ is given by equation (8). Such a spatial distribution $\Delta\alpha(\mathbf{r}, 0)$ is usually obtained numerically over a regularly sampled grid by putting

$$\Delta\alpha(\mathbf{r}, 0) = \text{FFT}^{-1} \{ \sqrt{W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f})} [A_1(\mathbf{f}) \cos\{\varphi_0(\mathbf{f})\} + i A_2(\mathbf{f}) \sin\{\varphi_0(\mathbf{f})\}] \}, \quad (33)$$

where FFT denotes the Fast Fourier Transform procedure, $A_1(\mathbf{f})$ and $A_2(\mathbf{f})$ are independent Gaussian random numbers with variance equal to 1 and $\varphi_0(\mathbf{f})$ are independent random numbers with uniform distribution and satisfying $0 < \varphi_0(\mathbf{f}) \leq 2\pi$ as we have seen before. The spatial distribution $\Delta\alpha(\mathbf{r}, 0)$ is random but it is ensured that its statistic properties are reproducible through $W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f})$.

Within the framework of the Frozen Turbulence Hypothesis, if we take a particular measurement at a given position at an initial instant, measurements at other moments are simply obtained from the positions on the same spatial distribution according to equation (9). The entire spatial distribution is moved in front of the observer.

In the model of the optical turbulence boiling, every spatial spectral component of frequency \mathbf{f} ‘oscillates’ at a given temporal frequency ν according to equation (18).

Equation (19) illustrates how the spatial components ‘oscillate’ over time and consequently how the spatial distribution of differential image motion ‘boils’. We have thus a spatial spectrum at every instant t and this makes it possible to obtain numerically the spatial distribution at any moment by performing the following transform:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha(\mathbf{r}, t) = & \sqrt{2} \text{FFT}^{-1} \{ \sqrt{W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f})} \cos \{2\pi\nu_0 f^{2/3}t + \varphi_b(\mathbf{f})\} \\ & \times [A_1(\mathbf{f}) \cos\{\varphi_0(\mathbf{f})\} + i A_2(\mathbf{f}) \sin\{\varphi_0(\mathbf{f})\}] \} \end{aligned} \quad (34)$$

where $\varphi_b(\mathbf{f})$ are independent random numbers with uniform distribution that satisfy $0 \leq \varphi_b(\mathbf{f}) < 2\pi$. Its randomness, which is attributed to the spatial spectral component, ensures that the temporal evolution is random and unpredictable while its statistical properties are reproducible through $W_{\Delta\alpha}(\mathbf{f})$ and through how energy is distributed over temporal frequencies.

The result of such a simulation can be viewed as a three-dimensional grid with one of its axis being time. It is then possible, by taking measurements at different spatial positions on layers corresponding to different instants, to have the temporal evolution of differential image motion including the optical turbulence boiling and horizontal translation.

The numerical simulation principle is briefly introduced here and more details will probably be discussed in a forthcoming paper.

6.2 Numerical estimation of temporal spectra

In both the cases of the frozen turbulence hypothesis and of the optical turbulence boiling without horizontal translation, solving the equations of energy transfer from spatial to temporal frequencies (equations 12 and 21) has been analytically straightforward. It consisted schematically in fixing a value to the temporal frequency ν and to look for all the possible values of the spatial frequencies f that satisfy the relations between ν and f , given by equations (11) and (18). For every fixed temporal frequency, the corresponding spatial frequencies provide an integration domain which is simple in shape for both the cases previously refereed to.

When considering the translating and boiling optical turbulence, the spatial frequency integration domains for fixed temporal frequencies are far more complex and we find it difficult to apply the same analytical reasoning as above to calculate temporal power spectral densities.

The simplest way to numerically solve equation (32) is to scan all the spatial frequencies and to assign their optical turbulence energy to the corresponding temporal frequencies. We have chosen to perform a semirandom sampling of spatial frequencies so that we ensure a better coverage of the optical turbulence spatial power spectral densities through several scans.

Temporal frequencies are regularly sampled with a sampling path $\delta\nu$. Meanwhile, the spatial frequency domain is mapped with square cells with dimensions $\delta f \times \delta f$ within which f are randomly sampled. To each spatial frequency f is associated the corresponding optical turbulence energy $W_{\Delta\alpha}(f)$. Otherwise, two temporal frequencies $\nu = f v + v_0 f^{2/3}$ and $\nu = f v - v_0 f^{2/3}$ are also associated with f . The procedure consists of then adding the amount of energy $\frac{1}{2} \frac{\delta f^2}{\delta\nu} W_{\Delta\alpha}(f)$ to the temporal power spectral density $\omega_{\Delta\alpha}(\nu)$ at the corresponding temporal frequencies ν . At the end of the scan, the optical turbulence energy in $W_{\Delta\alpha}(f)$ is redistributed over $\omega_{\Delta\alpha}(\nu)$ with respect to the relation between spatial and temporal frequencies. This is a very schematic description of the principle of the numerical procedure and does not include, for example, the improvement which consists of an adaptive mapping of the spatial frequency domain for an optimized sampling of the lower frequencies.

In practice, because the temporal frequency sampling path $\delta\nu$ is nonzero, the numerical procedure does not give the temporal power spectral density $\omega_{\Delta\alpha}(\nu)$ exactly but an average over $\delta\nu$. In fact, the result can be formally expressed by a convolution product $\omega_{\Delta\alpha}(\nu) \otimes \pi\{\nu/\delta\nu\}$ where $\pi\{\nu/\delta\nu\}$ is the rectangle function of base $\delta\nu$. A special care must then be taken for temporal frequency samplings and for temporal covariance calculations. The procedure has been implemented and successfully tested on the already known cases of the frozen turbulence hypothesis and the optical turbulence boiling without horizontal translation. The temporal power spectra are exactly the same in both the cases as those obtained analytically.

The resulting temporal power spectral densities from numerical calculations are as expected different in shape from the temporal power spectral densities obtained when the optical turbulence boiling or horizontal translation is ignored. Fig. 4 displays, as an example, a temporal power spectral density that has been calculated numerically from equation (32). It can be visually compared to Fig. 2 where v_0 is put equal to zero and to Fig. 3 where v is put equal to zero.

7 EFFECT OF THE OPTICAL TURBULENCE BOILING ON DIFFERENTIAL IMAGE MOTION

When a temporal spectrum $\omega_{\Delta\alpha}(\nu)$ is calculated for a given set of parameters, it is then possible to calculate the temporal covari-

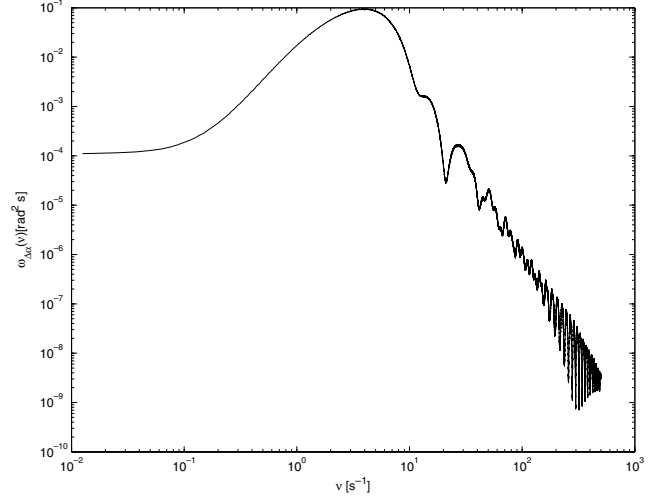


Figure 4. Plot of a temporal power spectral density of the instantaneous mono-directional differential image motion $\omega_{\Delta\alpha}(\nu)$ when both the optical turbulence boiling and the horizontal translation are involved. Here, the term $0.7654[\frac{C_0^2 \delta h}{\cos[\epsilon]}]$ is normalized to 1. $D = 1$ m, $L_0 = 10$ m, $h = 10$ km, $\Theta = 10$ arcsec, $\gamma = 0$ rad, $v = 10$ m s $^{-1}$, $\eta = 0$ rad and $v_0 = 1$.

ance of the instantaneous mono-directional differential image motion $R_{\Delta\alpha}(\tau)$ with equation (5), and then to calculate the statistical variance of the finite-exposure mono-directional differential image motion σ_T^2 with equation (4). This latter depends upon the shape of the temporal covariance, and so upon how fast the optical turbulence becomes uncorrelated.

Let us consider a situation where the optical turbulence is well described except for the optical turbulence boiling contribution. One can therefore calculate the variance of the finite-exposure one-directional differential image motion in the framework of the frozen flow hypothesis, thus assuming $v_0 = 0$, as a predictive characterization of the accuracy of astrometrical measurements for example. With the model we propose in the previous sections, we can introduce the optical turbulence boiling as a perturbation to the frozen flow hypothesis conditions in order to observe the difference.

The introduction of the optical turbulence boiling should reduce the coherence time that is due to the translating effect. It is then tempting to consider the optical turbulence boiling as being beneficial for differential astrometry because when the differential image motion is decorrelated faster, it means a decrease of the variance of finite-exposure differential image motion, as well as the astrometric error. It would be damaging at the same time for adaptive optics since it would mean that the optical turbulence evolves faster.

We can see, however, that in some conditions, introducing the optical turbulence boiling may increase the variance of finite-exposure differential image motion. Fig. 5, for example, displays the variance σ_T^2 as a function of exposure time T in case of some values of the optical turbulence boiling constant v_0 . One may note that in this particular configuration where the wind is parallel to the spatial projection of the angular separation, the variance σ_T^2 increases instead of decreasing.

It may be surprising at a first sight that a more uncorrelated optical turbulence would lead to an increase of the finite-exposure variance. This is understandable when considering the shape of the temporal covariance of the instantaneous one-directional differential image motion in this configuration where the wind is parallel to the angular separation spatial projection. In Fig. 6, one can see

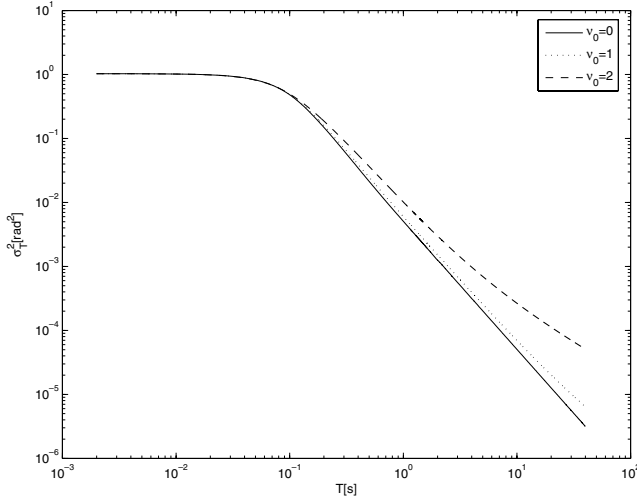


Figure 5. Plot of the statistical variance of the finite-exposure mono-directional differential image motion σ_T^2 as a function of exposure time T for some fixed values of the optical turbulence boiling constant v_0 . Here, the term $0.7654[\frac{C_n^2 h}{\cos[\varepsilon]}]$ is normalized to 1. $D = 1$ m, $L_0 = 10$ m, $h = 10$ km, $\Theta = 10$ arcsec, $\gamma = 0$ rad, $v = 10$ m s $^{-1}$ and $\eta = 0$ rad.

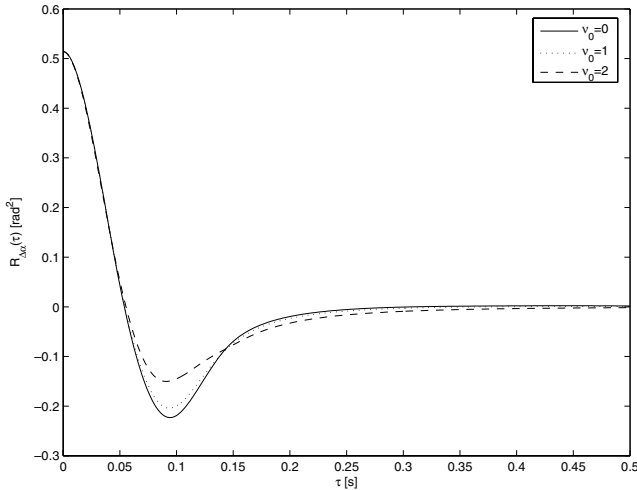


Figure 6. Plot of the temporal covariance of the instantaneous mono-directional differential image motion $R_{\Delta\alpha}(\tau)$ for some fixed values of the optical turbulence boiling constant v_0 . Here, the term $0.7654[\frac{C_n^2 h}{\cos[\varepsilon]}]$ is normalized to 1. $D = 1$ m, $L_0 = 10$ m, $h = 10$ km, $\Theta = 10$ arcsec, $\gamma = 0$ rad, $v = 10$ m s $^{-1}$ and $\eta = 0$ rad.

that the covariance in the case of the frozen turbulence hypothesis ($v_0 = 0$) has positive and negative values on different domains of the temporal separation τ . The negative part corresponds mainly to large temporal separations over which the instantaneous mono-directional differential image motion has a statistical tendency to be in opposite directions. Equation (4) otherwise shows that the variance of finite-exposure fluctuations is a weighted integral of the temporal covariance of the instantaneous fluctuations. When the optical turbulence boiling is introduced, it mainly affects those parts of the temporal covariance that correspond to the larger temporal separations. This leads to a rapid disappearance of the negative covariance zones so that the variance increases rapidly. Fig. 6 shows how the temporal covariance of the instantaneous one-directional

differential image motion can be affected by a relatively slow optical turbulence boiling. It can be observed that even in the presence of strong winds, the contribution of the optical turbulence boiling may be very notable, especially for long exposures.

What appears is that a precise determination of the variance of finite-exposure differential image motion requires the determination of the optical turbulence boiling constant v_0 alongside with the other parameters such as the wind velocity and its orientation according to the angular separation.

It also appears from this application to mono-directional differential image motion that the optical turbulence boiling is a significant contributor to the description of the accuracy of ground-based differential astrometry through the optical turbulence and that it deserves to be properly investigated in order to perform astrometric measurements in the most suitable conditions.

8 CONCLUSION

We have proposed over this contribution a theoretical modelling of the optical turbulence temporal evolution, which is based upon some phenomenological assumptions and which is applied here to finite-exposure differential image motion. We have shown how it is possible to calculate temporal spectra of the optical turbulence quantities in the general case in which both the turbulent layer horizontal translation and the optical turbulence boiling are involved. The model is quantitatively expressed within the framework of a one-layer turbulence configuration with the von Kàrmàn optical turbulence model. It can be easily generalizable into multilayered configurations and using other optical turbulence models.

The major aim of this contribution is to propose a theoretical approach to model the optical turbulence temporal evolution and its effects on modelling finite-exposure differential image motion when the turbulent layer horizontal translation and the optical turbulence boiling are both involved. We have also discussed the possible implications of such a model on ground-based differential astrometry. The calculations, however, have to be pursued more systematically in order to completely characterize the most favourable conditions for astrometric measurements. The implications of such a modelling of the optical turbulence temporal evolution have also to be investigated in other areas of the high angular resolution and confronted with experimental data.

REFERENCES

- Aime C., Kadiri S., Ricort G., 1980, Opt. Commun., 35, 169
- Aime C., Borgnino J., Martin F., Petrov R., Ricort G., Kadiri S., 1986, J. Opt. Soc. Am., 3, 1001
- Anderson J., Bedin L. R., Piotto G., Yadav R. S., Bellini A., 2006, A&A, 454, 1029
- Avila R., Ziad A., Borgnino J., Matin F., Agabi K., Tokovinin A., 1997, J. Opt. Soc. Am., 14, 3070
- Berdja A., Borgnino J., Irbah A., 2006, J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 8, 244
- Borgnino J., 1990, Appl. Opt., 29, 1863
- Borgnino J., Martin F., Ziad A., 1992, Opt. Commun., 91, 267
- Casertano S., Lattanzi M. G., Perryman M. A. C., Spagna A., 1996, Ap&SS, 241, 89
- Chauvin G., Lagrange A.-M., Dumas C., Zuckerman B., Mouillet D., Song I., Beuzit J.-L., Lowrance P., 2005, A&A, 438, L25
- Conan J.-M., Rousset G., Madec P.-Y., 1995, J. Opt. Soc. Am., 12, 1559
- Davis J., North J. R., 2001, Publ. Astron. Soc. Aust., 18, 281
- Fitzgerald M. P., Graham J. R., 2006, ApJ, 637, 541
- Gatewood G. D., 1987, ApJ, 94, 213
- Gendron E., Léna P., 1996, Ap&SS, 239, 221

- Gubler J., Tytler D., 1998, *PASP*, 110, 738
 Innocenti C., Consortini A., 2004, *Proc. SPIE*, 5237, 25
 Jolissaint L., Véran J.-P., Conan R., 2006, *J. Opt. Soc. Am.*, 23, 382
 Kellerer A., Tokovinin A., 2007, *A&A*, 461, 775
 Lane F., Muterspaugh M. W., 2004, *ApJ*, 601, 1129
 Lattanzi M. G., Spagna A., Sozzetti A., Casertano S., 2000, *MNRAS*, 317, 211
 Launhardt R., 2005, *Astron. Nachr.*, 326, 563
 Lazorenko P. F., 2006, *A&A*, 449, 1271
 Lazorenko P. F., Lazorenko G. A., 2004, *A&A*, 427, 1127
 Lindegren L., 1980, *A&A*, 89, 41
 Lopez B., 1992, *A&A*, 253, 635
 Lopez B., Sarazin M., 1993, *A&A*, 276, 320
 Masciadri E., Vernin J., 1997, *Appl. Opt.*, 36, 1320
 McAlister H. A., 1996, *Ap&SS*, 241, 77
 Pravdo S. H., Shaklan S. B., 1996, *ApJ*, 465, 264
 Roddier F., Gilli J. M., Lund G., 1982, *J. Optics (Paris)*, 13, 263
 Roddier F., Northcott M. J., Graves J. E., McKenna D. L., Roddier D., 1993, *J. Opt. Soc. Am.*, 10, 957
 Schöck M., Spillar E. J., 1999, *Proc. SPIE*, 3762, 225
 Schöck M., Spillar E. J., 2000, *J. Opt. Soc. Am.*, 17, 1650
 Shao M., Colavita M. M., 1992, *A&A*, 262, 353
 Sozzetti A., 2005, *PASP*, 117, 1021
 Sozzetti A., Casertano S., Brown R. A., Lattanzi M. G., 2003, *PASP*, 115, 1072
 St-Jacques D., 1998, PhD thesis, Univ. Cambridge
 St-Jacques D., Baldwin J. E., 2000, *Proc. SPIE*, 4006, 951
 Tatarskii V. I., 1971, *The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem
 Vernin J., Roddier F., 1973, *J. Opt. Soc. Am.*, 63, 270
 Vernin J., Weigelt G., Caccia J.-L., Müller M., 1991, *A&A*, 243, 553
 Vogel C. R., 2006, *Proc. SPIE*, 6272, 627229

This paper has been typeset from a \TeX/L\TeX file prepared by the author.

5.5.3 Exemple d'application en interférométrie

L'interférométrie longue-base est une classe majeure des techniques d'observation astronomique à haute résolution angulaire. Elle consiste à combiner de manière cohérente les amplitudes complexes issues de deux ou de plusieurs télescopes séparés par de longues lignes de base [162, 108, 130]. La résolution angulaire du système en terme de séparation angulaire minimale des objets observés est essentiellement déterminée par la géométrie des bases au sol, et notamment la distance physique entre les télescopes. Cependant, la résolution angulaire qu'on peut atteindre avec un système interférométrique est limitée par la turbulence optique.

Supposons un système simple d'un interféromètre à deux télescopes observant une étoile au zénith et dans l'axe optique des télescopes. Cet interféromètre peut être caractérisé par la taille des télescopes (de diamètre D), d'une base de collection (*collection baseline*) qui est la base physique séparant les deux télescopes \vec{B} et d'une base de combinaison (*combination baseline*) qui est la base \vec{B}_0 selon laquelle s'effectue la focalisation des deux faisceaux issus des télescopes dans un système combineur qui fait ressortir les figures d'interférence [108]. Le système de combinaison est celui de Fizeau bien qu'on puisse en principe en décrire d'autres. En l'absence de turbulence optique, l'image au foyer de l'interféromètre de chaque télescope pris séparément est sa réponse impulsionnelle instrumentale, une tache d'Airy si les télescopes sont sans obstruction centrale. Ces taches d'Airy se superposent au foyer du combineur et font apparaître des franges d'interférence qui sont déterminées par la base de combinaison \vec{B}_0 . Ce cas idéal est représenté dans la figure de gauche de la figure 5.5. Si l'étoile s'éloigne du zénith, il s'ensuit un déplacement des franges à cause de la différence de phase entre les deux télescopes et un déplacement des enveloppes (les taches d'Airy) à cause de la variation de l'angle d'arrivée au niveau des télescopes. Le recentrage de l'image des franges requiert l'introduction d'un retard de phase dans les bras de l'interféromètre pour compenser le déphasage introduit par la position de l'étoile et le recentrage de l'enveloppe des franges requiert le pointage de l'étoile par les télescopes. Un système multiple ou étendu qui peut être résolu par un télescope virtuel de la taille physique de l'interféromètre est encodé dans une modulation des franges issues de la base de combinaison \vec{B}_0 . Cet encodage dépend de la base de collection \vec{B} [108].

La turbulence optique se manifeste de diverses manières dans le plan image d'un interféromètre [150]. Tout d'abord, pour chaque télescope pris séparément, on observe l'apparition de figures de *speckles*. Ces figures de speckles sont différentes dans les deux télescopes car chacun est sensible à une partie différente de l'atmosphère terrestre turbulente. Elles subissent aussi des fluctuations d'angle d'arrivée, ce qui pour des petits télescopes produit une agitation relative des taches d'Airy qui se superposent partiellement de manière aléatoire. Lorsque ces figures de *speckles* sont combinées de manière cohérente, il apparaît dans les zones de recouvrement des franges d'interférence qui subissent des déplacements aléatoires à cause des fluctuations de phase relatives au niveau des télescopes principalement, et aussi à cause des fluctuations locales de phase. En effet, les



FIG. 5.5 – La figure de gauche montre une figure de franges tel qu'elle doit être obtenue pour une étoile seule sur l'axe optique en l'absence de turbulence optique avec deux télescopes de diamètre $D=2$ m sans obstruction centrale séparés d'une base de combinaison (*combination baseline*) de longueur $B_0=8$ m à la longueur d'onde $\lambda=550$ nm. Il s'agit d'une combinaison de type interférométrie de Fizeau dans le plan image [108, 130]. La figure de droite montre la même figure d'interférence en présence de turbulence optique. On a supposé que la base de collection (*collection baseline*) était de même longueur que la base de combinaison. Dans cet exemple obtenu par simulation numérique on a pris $r_0(550nm)=20$ cm et $L_0=10$ m avec le modèle de von Kàrmàn pour une couche turbulente unique située à une altitude $h=500$ m.

figures de *speckles* sont aléatoirement distribuées d'un *speckle* à un autre et la figure dans son ensemble fluctue dans le temps (la figure de recouvrement des *speckles* et son mouvement, la distribution des franges d'interférence dans les *speckles* et le mouvement d'ensemble des franges d'interférence) [150]. Un exemple de telles perturbations peut être observé dans la figure de droite de la figure 5.5 obtenue par simulation numérique.

Une optique adaptative de type *tip-tilt* peut prévenir le mouvement relatif global des zones de recouvrement des figures de franges dans le plan image de l'interféromètre. Une optique adaptative de plus haut ordre peut en principe prévenir l'éclatement de l'image donnée par chaque télescope en figure de *speckles*. Avec une optique adaptative parfaite on aura donc un zone de recouvrement stable sous la forme d'une tache d'Airy. Cette optique adaptative ne corrige que les fluctuations relatives au niveau de chaque télescope et ne corrige pas la différence de phase globale entre les télescopes [173]. La différence de phase entre les télescopes est un piston différentiel et les fluctuations de celui-ci produisent dans le plan de combinaison un mouvement aléatoire des franges d'interférence à l'intérieur de la tache d'Airy stabilisée. Affectés comme ils sont par la turbulence optique, les interféromètres peuvent à l'occasion servir aussi à caractériser cette même turbulence optique [113, 122].

Comme pour les observations avec un télescope monopupille, il est possible de corriger en temps réel les effets des fluctuations du piston différentiel avec un système de correction suiveur de franges (*Fringe Tracking* ou *Phase Referencing*) [108]. Le principe consiste à mesurer le déplacement des franges d'interférence et d'introduire une correction de retard de phase sur les chemins optiques des fais-

ceux des l'interféromètre pour en compenser l'agitation. Comme pour l'optique adaptative monopupille, l'opération des systèmes de *Phase Referencing* dépend de la rapidité de leurs réponses aux fluctuations temporelles dues à la turbulence optique et même en l'absence d'un tel système, il est nécessaire d'opérer à des échelles de temps courtes devant les échelles de variation temporelle des fluctuations du piston différentiel afin de geler le brouillage des figures de franges d'interférences dans le temps [94].

D'un autre côté, l'interférométrie atteint de grandes précisions astrométriques en longue pose [100, 163] qui peuvent permettre à partir du sol la détection du mouvement imprimé à une étoile par des exoplanètes en orbite [169]. L'astrométrie différentielle par interférométrie longue-base est essentiellement limitée par l'anisoplanétisme du piston différentiel et des propriétés statistiques temporelles des fluctuations de ce piston différentiel entre les sources observées [49].

Considérons par exemple le cas d'un interféromètre à deux télescopes qui observe deux étoiles [49]. Les propriétés de la turbulence optique affectant les mesures interférométriques dépendent de la base de collection \vec{B} , soit de la projection des télescopes dans le ciel. On considère une séparation angulaire entre les étoile $\vec{\theta}$ et une seule couche turbulente à une hauteur h . La position mesurée au foyer de l'interféromètre pour chaque étoile est donnée par le piston différentiel associé. La mesure de distance angulaire entre les deux étoiles correspond alors à la différence des pistons différentiels pour chacune d'elles. La différence des pistons différentiels fluctue autour d'une moyenne et ce sont ces fluctuations qui déterminent la précision de la mesure astrométrique différentielle. De la même manière que ce qui a été développé précédemment pour l'astrométrie différentielle monopupille [18], on peut facilement montrer avec le même formalisme comment relier la précision des mesures astrométriques en longue pose à la densité spectrale temporelle des fluctuations de la différence du piston différentiel.

Avant de chercher à calculer la densité spectrale temporelle des fluctuations de la différence du piston différentiel, il faut tout d'abord déterminer la densité spectrale spatiale de ces mêmes fluctuations.

Considérons la géométrie du problème telle que donnée par la figure 5.6. Les fluctuations du piston au niveau de chaque télescope $T1$ et $T2$ sont données par la moyenne spatiale des fluctuations de phase sur la surface de leurs pupilles d'entrée. Les fluctuations du piston différentiel pour chaque étoile $S1$ et $S2$ est la différence entre les fluctuations du piston au niveau des deux télescopes $T1$ et $T2$ pour chacune des étoiles. Les fluctuations de la mesure de la distance angulaire entre les étoiles $S1$ et $S2$ sont données par la différence entre les fluctuations du piston différentiel pour chacune des deux étoiles. Prenant en compte la hauteur h , la densité spectrale spatiale des fluctuations de la mesure interférométrique de la distance angulaire entre les deux étoiles $W_{\Delta^2\Psi}(\vec{f})$ est donnée par

$$W_{\Delta^2\Psi}(\vec{f}) \approx 4W_{ap}(\vec{f})W_{\varphi,h}(\lambda, \vec{f}) \cos^2 \left\{ \pi\lambda \frac{h}{\zeta} f^2 \right\}$$

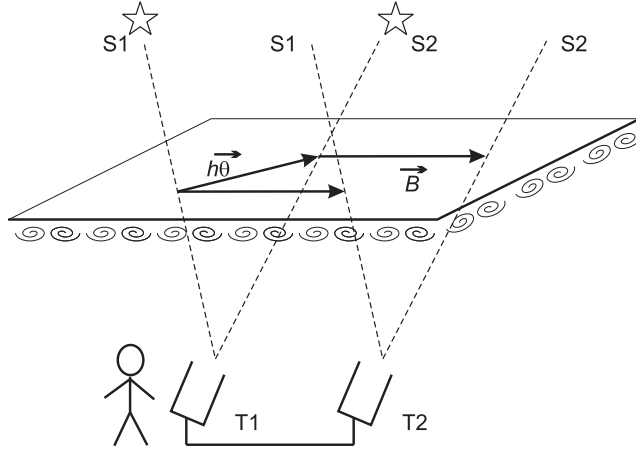


FIG. 5.6 – Schéma montrant la projection sur le plan de la couche turbulente de la base spatiale B et la base angulaire θ qui caractérisent la mesure astrométrique différentielle avec un interféromètre.

$$\times \left[1 - \cos \left\{ 2\pi \vec{f} \cdot \vec{B} \right\} \right] \left[1 - \cos \left\{ 2\pi h \vec{f} \cdot \vec{\theta} \right\} \right] \quad (5.40)$$

$W_{ap}(\vec{f})$ est la fonction de filtrage spatial des pupilles des télescopes supposées les mêmes. $W_{\varphi,h}(\lambda, \vec{f})$ est la densité spectrale spatiale des fluctuations de phase, contribution de la couche à l'altitude h . $\left[1 - \cos \left\{ 2\pi \vec{f} \cdot \vec{B} \right\} \right]$ est le terme différentiel spatial dû à la base de collection \vec{B} . Il s'agit du terme qui exprime l'opération différentielle entre les mesures du piston entre les deux télescopes. $\left[1 - \cos \left\{ 2\pi h \vec{f} \cdot \vec{\theta} \right\} \right]$ est le terme différentiel angulaire qui exprime la mesure de différence entre les fluctuations affectant les positions des deux étoiles telles que mesurées au moyen de l'interféromètre en présence de turbulence optique. ζ est la distance zénithale moyenne des deux étoiles.

Dans le cas où l'on a une continuité de couches turbulentes dans l'atmosphère, la densité spectrale spatiale s'écrit tout simplement

$$W_{\Delta^2\Psi}(\vec{f}) \approx 4W_{ap}(\vec{f}) \left[1 - \cos \left\{ 2\pi \vec{f} \cdot \vec{B} \right\} \right] \times \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\zeta} W_{\varphi,h}(\lambda, \vec{f}) \cos^2 \left\{ \pi \lambda \frac{h}{\zeta} f^2 \right\} \left[1 - \cos \left\{ 2\pi h \vec{f} \cdot \vec{\theta} \right\} \right] \quad (5.41)$$

On va continuer néanmoins à ne considérer que la contribution d'une couche turbulente unique pour garder la clarté des écritures, soit l'équation 5.40. Le cas multicouche n'est qu'une généralisation où l'on somme la contribution de toutes les couches du profil de l'atmosphère turbulente.

La densité spectrale temporelle $\omega_{\Delta^2\Psi}(\nu)$ dans le cas où l'on a une variation

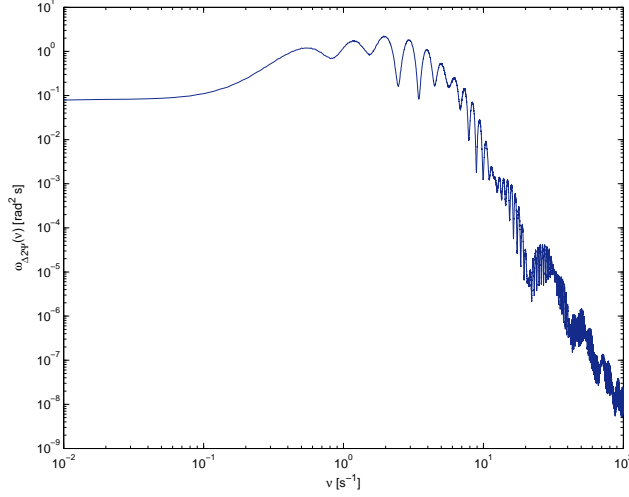


FIG. 5.7 – Exemple de spectre temporel des fluctuations du piston différentiel pour deux étoiles. Il s'agit dans cet exemple d'un interféromètre avec une base de collection $B=10$ m avec deux télescopes de diamètre $D=1$ m sans obstruction centrale. La séparation angulaire entre les deux étoiles est $\theta=10$ arcsec et la base angulaire qu'elles forment est parallèle à la base de l'interféromètre. La couche turbulente se situe à une hauteur $h=10$ km et se déplace à une vitesse $v=10$ m/s dans le sens parallèle à la base de l'interféromètre mais la diffraction est ignorée. Seule l'échelle externe, donnée par le spectre de von Kàrmàn pour la densité spectrale spatiale et sous la forme donnée par l'équation 5.20 pour l'identification spectrale, est introduite et a pour valeur $L_0=10$ m. La constante de bouillonnement considérée est $\nu_0=1 \text{ m}^{2/3} \text{ s}^{-1}$ et la constante $\frac{4C_n^2 \delta h 0.3827}{\lambda^2 \zeta}$ est ramenée à la valeur 1. C'est un spectre obtenu par intégration numérique. Toute configuration avec d'autres paramètres est possible.

temporelle par bouillonnement en même temps qu'une translation horizontale est donnée comme on l'a vu précédemment (Equation 5.39) par

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta^2\Psi}(\nu)d\nu = & \frac{1}{2} \int_{\nu=\vec{f}\vec{v}+\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} W_{\Delta^2\Psi}(\vec{f}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\nu=\vec{f}\vec{v}-\nu(\nu_0, \vec{f}, l_0, L_0)} d\vec{f} W_{\Delta^2\Psi}(\vec{f}) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Pour résoudre cette équation, on procède numériquement de la même manière que pour le cas de l'astrométrie différentielle monopupille [18]. La figure 5.7 montre un exemple de spectre obtenu avec cette méthode.

5.6 Simulation numérique du bouillonnement de la turbulence optique

Ayant modélisé le bouillonnement de la turbulence optique, il est possible de faire la simulation numérique de la variation temporelle de la turbulence optique en y incluant cet effet. On se base pour cela sur l'équation 5.21. Cette équation décrit l'oscillation dans le temps de chaque composante spectrale spatiale d'un champ spatial de fluctuations. Ainsi, si on dispose d'un champ spatial de fluctuations de la turbulence optique à un instant t_0 , il est possible d'obtenir les champs spatiaux des mêmes fluctuations à des instants postérieurs t en faisant osciller temporellement ses composantes spectrales spatiales. Il s'agit de faire exactement ce qui est décrit dans la figure 5.2.

La présente présentation "*How to Monte-Carlo Simulate the Optical Turbulence Boiling beyond the Frozen Flow Hypothesis*" a été présentée au "*Symposium on Seeing 2007*" à Kona-Hawaii et soumise à publication dans les *proceedings* associés. Elle présente cette façon de procéder dans le cadre de la génération d'écrans de phase évoluant par bouillonnement dans un but de modélisation de ce qui se passe pour un senseur de front d'onde par exemple. La méthode a été écrite pour une relation d'identification fréquentielle du type ne s'appliquant qu'à l'intérieur du domaine inertiel de la turbulence comme dans l'équation 5.18. Il faut cependant utiliser la relation d'identification fréquentielle généralisée telle que celle décrite dans l'équation 5.20. Bien que la présentation se focalise sur les fluctuations de phase, il est à noter que la méthode peut s'appliquer à n'importe quelle observable de la turbulence optique.

Le format de la présentation a été modifié pour minimiser l'espace qu'elle occupe dans le présent document.

How to Monte-Carlo Simulate the Optical Turbulence Boiling beyond the Frozen Flow Hypothesis

Amokrane Berdja *

LUAN-UMR 6525, Université de Nice-Sophia Antipolis

Julien Borgnino

LUAN-UMR 6525, Université de Nice-Sophia Antipolis

Abstract

High Angular Resolution through turbulence requires an accurate description of the optical turbulence time variations. As for spatial fluctuations, time variations of optical turbulence observable quantities are random with reproducible statistical and spectral properties. This property allows performing Monte-Carlo simulations of spatial distributions and time variations of the optical turbulence observable quantities, such as phase fluctuations or scintillation. The optical turbulence time variations are usually described by the so-called Frozen Flow Hypothesis, in which turbulence is supposed to be equivalent to a series of solid phase-screens that slide horizontally across the observation field-of-view. Experimental evidence shows however that an additional physical process must be taken into account. In fact, while translating above the observer, turbulence undergoes proper time variations that affect differently the astronomical observations. The proper time variations of the optical turbulence observable quantities as described here might be called the optical turbulence boiling in the following, and the central topic of our discussion concerns the optical turbulence time variations beyond the paradigm of the Frozen Flow Hypothesis, and how to Monte-Carlo simulate the Optical Turbulence Boiling effect.

1 Introduction

The effective efficiency of ground-based high angular resolution techniques is often sensitive to the temporal statistical properties of optical turbulence. For instance, optimal situations for speckle interferometry, for a given exposure time,

* *Corresponding author address:* Amokrane Berdja, LUAN-UMR 6525, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose F-06108 Nice Cedex 2, France.
E-mail: berdja@unice.fr

require slow temporal variations of the speckle patterns of unresolvable star images [C. Aime and Ricort(1980), C. Aime and Ricort(1986)]. Slow-varying optical turbulence is also relevant to real-time compensation techniques [Fitzgerald and Graham(2006)]. An Adaptive Optics system, for a given response time, has to be more efficient in case of slow temporal variations of phase fluctuations. A Fringe-Tracking system for ground-based interferometry has also to be more efficient in case of slow temporal variation of differential piston fluctuations [Kellerer and Tokovinin(2007)]. On the other side, fast-varying optical turbulence is relevant for ground-based astrometry surveys. A ground-based mono-aperture telescope astrometric reduction, for a given integration time, has to be more efficient in case of fast temporal variations of turbulence-induced differential image motion [Lindegren(1980)]. A ground-based interferometric astrometric reduction has also to be more efficient in case of fast temporal variations of differential piston fluctuations. The optimum implementation of these methods relies on the knowledge of the temporal coherence time of the relevant observable quantities like turbulence-induced differential image motion for ground-based mono-aperture telescope astrometry for example [Berdja and Borgnino(2007)].

The optical turbulence temporal evolution is usually described with the so-called Frozen Flow Hypothesis, or the Taylor hypothesis. The Frozen Flow Hypothesis is based upon the approximation that for short exposure times, wavefronts that are induced by the contribution of a single turbulence layer, do not deform and translate uniformly, without any distortion, as if they were induced by a solid diffuser [F. Roddier and Lund(1982)]. This model leads to a relatively straightforward theoretical description of the optical turbulence temporal evolution and its statistical properties [J.-M. Conan and Madec(1995), R. Avila and Tokovinin(1997)]. The deterministic aspect of the frozen and horizontally travelling turbulent layers might otherwise allow making predictions on the evolution of the wavefront pattern and thus making adaptive optics more efficient. It requires for the Frozen Flow Hypothesis to be valid during a sufficient period of time. A closer look via dedicated experiments has indeed given a new insight on the limits of the Frozen Flow Hypothesis [Schöck and Spillar(1999)]. It appears that this approximation is valid only for time intervals that are lower than a few tens of milliseconds and that the optical turbulence temporal evolution cannot be described only by supposing wavefront horizontal translations as it is usually thought [Schöck and Spillar(2000), Saint-Jacques and Baldwin(2000)]. While translating in front of the telescope field-of-view, optical turbulence undergoes a proper temporal evolution, which for a stationary observer superposes on that evolution produced by the horizontal transportation. This proper temporal evolution is to be referred-to as the Optical Turbulence Boiling [Berdja and Borgnino(2007)].

We can roughly distinguish two phenomenological processes in the observed optical turbulence temporal evolution. First, an apparent evolution due to the relative horizontal translation of the turbulent layer relatively to the observer [J. Vernin and Müller(1991), Gendron and Léna(1996)]. For a given line of sight, light experiences different parts of the turbulent layer over time. And

secondly, the Optical Turbulence Boiling, which is due to the chaotic dynamical evolution of fluid turbulence. This process can be schematically described as being due to the fact that inside a turbulent layer, the relative spatial configuration of eddies at all available scales does vary in time.

The major issue of the present presentation is to propose a practical method for numerically simulate random temporal variations of a random spatial distribution of an optical turbulence observable quantity in the framework of the optical turbulence boiling as defined above. The method is based upon some basic theoretical considerations resulting from the statistical description of fully developed turbulence. In the following we emphasize simulating the temporal evolution of the spatial distribution of phase fluctuations because of the expected applications for adaptive optics for example [Vogel(2006)]. The method we describe can be easily generalized to the other optical turbulence observable quantities as well.

We will discuss in the following the contribution of a single turbulent layer. The contributions from different turbulent layers can be easily summed up according to their contributions.

2 The Frozen Flow Hypothesis

In this approximation, we consider that the optical turbulence temporal evolution is dominated by the translational effect as if the turbulence spatial pattern was frozen and entirely translated by the wind with a constant velocity \mathbf{v} . Turbulence is supposed to be equivalent to a solid phase screen that slides horizontally in front of the observation field of view. We must keep in mind however that this description is valid only for a limited time, beyond which we could consider that the Optical Turbulence Boiling might become sufficiently important to induce additive temporal decorrelation.

Let $\varphi(\mathbf{r}, t)$ be an instantaneous spatial distribution of phase fluctuations as measured at the entrance pupil of a ground-based telescope, where $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ is a two-dimensional position vector.

At an arbitrary initial instant $t = 0$, one can write

$$\varphi(\mathbf{r}, 0) = \int d\mathbf{f} |\bar{\varphi}(\mathbf{f}, 0)| \exp\{2\pi i \mathbf{f} \mathbf{r} + i \chi_0(\mathbf{f})\}, \quad (1)$$

where $|\bar{\varphi}(\mathbf{f}, 0)|$ is the modulus of the spatial Fourier transform of $\varphi(\mathbf{r}, 0)$. It is to be considered as a random quantity whose statistical variance gives the spatial power spectral density of the instantaneous phase fluctuations. $\chi_0(\mathbf{f})$ is a random arbitrary phase with $0 < \chi_0(\mathbf{f}) \leq 2\pi$.

During a finite duration t , the whole turbulence is translated along a distance vt where \mathbf{v} is still the velocity vector of the turbulence translation. At an instant t , the observed optical turbulence pattern through a fixed line of sight at a position \mathbf{r} is the same pattern that was observed according to that same line of sight but at a position $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$ at the instant $t = 0$. According to the Frozen Flow Hypothesis we can then write

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, 0). \quad (2)$$

Within the framework of the Frozen Flow Hypothesis, the instantaneous spatial distribution of phase fluctuations $\varphi(\mathbf{r}, 0)$, or phase screen, remains constant in time. The only change that occurs in time is that of the relative position of the spatial distribution $\varphi(\mathbf{r}, 0)$ to the observation line of sight. In this case the optical turbulence is static. It can be simulated by a single instantaneous phase screen, and then it can be translated in front of the telescope field of view.

In real-life world however, optical turbulence (and consequently phase and other fluctuations) are not indefinitely frozen. Optical turbulence undergoes a proper time-variation.

3 The Optical Turbulence Boiling

The situation we are to describe now is the case where the turbulent layer does not translate horizontally across the observation field of view. In this case $v = 0$ explicitly. We can imagine in fact that rather than remaining indefinitely frozen, the optical turbulence will undergo a proper evolution, the Optical Turbulence Boiling.

In order to model this effect, we will first recall some of the earliest results of the statistical modelling of turbulence.

A fully developed and stationary turbulent fluid is statistically described with the energy cascade model. In this approach, the energy flow from large spatial structures of turbulence to smaller structures is constant. This implies through a dimensional reasoning within the framework of the Kolmogorov model that to a structure of turbulence with a given spatial characteristic length l is associated an average velocity fluctuation u which is proportional to $l^{1/3}$.

For a turbulence structure with a spatial length l , a velocity fluctuation u is characterized by its fluctuation time τ where $\tau = l/u$. This characteristic fluctuation time refers to the turbulence structure lifetime. It is an estimation of the time during which a turbulence structure appears and disappears. By replacing u by $l^{1/3}$ we have [Masciadri and Vernin(1997)]

$$\tau \propto l^{2/3}. \quad (3)$$

This describes how turbulence 'boils'. The above proportionality gives a direct relation between temporal frequencies ν and spatial frequencies \mathbf{f} for optical turbulence. This relation is given by

$$\nu \propto f^{2/3}. \quad (4)$$

In an optical turbulence distribution, spatial spectral components can be associated to temporal spectral components through a simple relation between spatial and temporal frequencies

We can introduce now a proportionality constant ν_0 as an independent parameter that expresses how fast the optical turbulence evolves by Optical Turbulence Boiling. In this case we write

$$\nu = \nu_0 f^{2/3}. \quad (5)$$

This also gives $f = \left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^{3/2}$ and $d\nu = \frac{2\nu_0}{3} f^{-1/3} df$.

The spatial spectral components during the optical turbulence boiling can be viewed as resembling standing waves, each oscillating at a temporal frequency that is given by Equation 5. With these considerations, the instantaneous spatial distribution of phase fluctuations at instant t is given by [Berdja and Borgnino(2007)]

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \int d\mathbf{f} |\bar{\varphi}(\mathbf{f}, 0)| \cos \left\{ 2\pi\nu_0 f^{2/3} t + \chi_b(\mathbf{f}) \right\} \times \exp\{2\pi i \mathbf{f} \mathbf{r} + i\chi_0(\mathbf{f})\}, \quad (6)$$

where $\chi_b(\mathbf{f})$ is an arbitrary phase with $0 \leq \varphi_b(\mathbf{f}) < 2\pi$. The term $\sqrt{2} \cos \{2\pi\nu_0 f^{2/3} t + \chi_b(\mathbf{f})\}$ expresses here the temporal modulation of the spatial spectral component of spatial frequency \mathbf{f} .

It is possible to make an estimate of the numerical order of magnitude of the Optical Turbulence Boiling constant ν_0 from experimental data. For example, a technique to test the Frozen Flow Hypothesis quantitatively using data from wavefront sensors has been developed [Schöck and Spillar(2000)]. In these experiments, the quantity of interest is mainly the spatio-temporal autocorrelation function of the mono-directional image motions measured through the sub-apertures of the wavefront sensor.

In order to interpret in a simple manner such results, we may consider distant sub-apertures whose relative position matches the wind direction in case of a single turbulent layer. We consider two sub-apertures a and b who are separated by a given distance L . The turbulence features that cross the line of sight of sub-aperture a reach the line of sight of sub-aperture b after a time interval whose duration is L/v , where v is still the velocity of the turbulent layer horizontal translation. In the case of total validity of the Frozen Flow Hypothesis, mono-directional image motion at sub-aperture b at instant t is exactly the same mono-directional image motion measured at sub-aperture a at instant $t - L/v$. This means that the spatio-temporal covariance of mono-directional image motion at distance L and time interval L/v is given by the variance of mono-directional image motion anywhere. Now if during its travel from sub-aperture a to sub-aperture b turbulence undergoes proper evolution, then the spatio-temporal covariance of mono-directional image motion at distance L and time interval L/v is given by the temporal covariance of mono-directional image motion at time interval L/v , where only the optical turbulence boiling is involved. It becomes then possible to estimate the boiling constant ν_0 .

4 Monte-carlo numerical simulation of static optical turbulence

Considering Equation 1, we might recall that $\varphi(\mathbf{r}, 0)$ is a random and unpredictable spatial distribution whose Fourier transform has random spatial frequency-distributed modulus $|\bar{\varphi}(\mathbf{f}, 0)|$ and phase $\chi_0(\mathbf{f})$. Only reproducible are the statistical quantities like the spatial power spectrum $W_\varphi(\mathbf{f})$, which is given by $W_\varphi(\mathbf{f}) = \langle |\bar{\varphi}(\mathbf{f}, 0)|^2 \rangle$.

One can then simulate random and unpredictable spatial distributions $\varphi(\mathbf{r}, 0)$ by performing a Fourier transform of a random complex quantity whose statistical variance is given by the expected spatial power spectrum $W_\varphi(\mathbf{f})$ [Nakajima(1988)]. Such a spatial distribution $\varphi(\mathbf{r}, 0)$ is usually obtained numerically over a regularly sampled grid by putting

$$\varphi(\mathbf{r}, 0) = FFT^{-1} \{ \delta f \sqrt{W_\varphi(\mathbf{f})} [A_1(\mathbf{f}) \cos\{B_0(\mathbf{f})\} + i A_2(\mathbf{f}) \sin\{B_0(\mathbf{f})\}] \}, \quad (7)$$

where FFT denotes the Fast Fourier Transform procedure, $A_1(\mathbf{f})$ and $A_2(\mathbf{f})$ are independent Gaussian random numbers with variance equal to 1, and $B_0(\mathbf{f})$ are independent random numbers with uniform distribution and satisfying $0 < B_0(\mathbf{f}) \leq 2\pi$ as we have seen before. δf here is the fixed sampling path in spatial frequency, supposed for simplicity to be the same in both the f_x and f_y directions.

The spatial distribution $\varphi(\mathbf{r}, 0)$ is random but it is ensured that its statistic properties are reproducible through $W_\varphi(\mathbf{f})$.

Before performing the FFT procedure one has to care symmetrizing the random complex quantity (the real part is symmetric and the imaginary part is antisymmetric to the spatial frequency transform $\mathbf{f} \rightarrow -\mathbf{f}$) in order to ensure a real-number output distribution of phase fluctuations [Nakajima(1988)].

This numerical approach is the most straightforward application of Equation 1. It has however two inconveniences. The first is that very often, low spatial frequencies are badly sampled [R. G. Lane and Dainty(1992)]. Successive over-samplings of the optical turbulence spectrum low frequency components adding their corresponding phase-screens after appropriate interpolation and re-normalization lead to very satisfying single-use phase-screens for adaptive optics for instance. The other inconvenience is that for a statistical study of a great number of simulated phase-screens, the spatial frequencies are always the same for all the samples and the statistical properties are those of a discretely-distributed power spectral density rather than a continuous one. In this case one can perform a numerical integration for Equation 1 with a semi-regular sampling of spatial frequencies, a method inspired by the Random Wave Vectors method for numerical simulation [D. Kouznetsov and Ortega-Martinez(1997), V. V. Voitsekhovich and Cuevas(1999), V. V. Voitsekhovich and Orlov(2005)].

For this purpose, let us consider a regular two-dimensional sampling of spatial frequencies \mathbf{f} with a constant path δf in both the f_x and f_y directions. For every single value of spatial frequency \mathbf{f} , one takes in computing the Fourier

transform a spatial frequency with a value $\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\mathbf{R}}(\mathbf{f})$ where $\mathbf{f}^{\mathbf{R}}(\mathbf{f})$ is a random two-dimensional vector $\mathbf{f}^{\mathbf{R}}(\mathbf{f}) = f_x^R(\mathbf{f})\mathbf{i} + f_y^R(\mathbf{f})\mathbf{j}$ of uniform distribution with $0 < f_x^R(\mathbf{f}) \leq \delta f$ and $0 < f_y^R(\mathbf{f}) \leq \delta f$. In the uniformly spaced grid defined by the regular sampling \mathbf{f} , every single square area with a side length δf is sampled randomly with $\mathbf{f}^{\mathbf{R}}(\mathbf{f})$. This semi-random sampling of spatial frequencies ensures statistically a good coverage of the spectrum, leading to the expected statistical properties. The long-range regularity of this sampling ensures that all the spatial scales of the optical turbulence are 'continuously' present without 'space frequency holes' as requested by the cascade energy model. A typical implementation of this approach may be expressed in the following form:

$$\varphi(\mathbf{r}, 0) = \sqrt{2}\sqrt{4} \sum_{f_x, f_y \geq 0} \delta f A(\mathbf{f}) \sqrt{W_\varphi(\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\mathbf{R}})} \cos\{2\pi(\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\mathbf{R}})\mathbf{r} + B_0(\mathbf{f})\}. \quad (8)$$

The $\sqrt{2}$ factor is due to the fact of using the Cosine function rather than the exponential function in the numerical Fourier transform. The $\sqrt{4}$ factor is due to the fact of using only one quarter of the spatial frequency domain, which is expressed by $f_x, f_y \geq 0$ in the above equation. $A(\mathbf{f})$ are independent Gaussian random numbers with variance equal to 1. We will however emphasize discussing the *FFT*-based method for it is sufficient for most applications like in the Adaptive-Optics performance studies.

Within the framework of the Frozen Flow Hypothesis, if we take a particular measurement at a given position at an initial instant, measurements at other moments are simply obtained from the positions on the same spatial distribution according to Equation 2. As time passes, observation field-of-view samples different parts of a static phase-screen because of wind horizontal transportation of turbulence. An example of such a situation is displayed in Figure 2.

5 Monte-carlo numerical simulation of the Optical Turbulence Boiling

We have seen in the discussion of the Optical Turbulence Boiling model that every spatial spectral component of frequency \mathbf{f} 'oscillates' at a given temporal frequency ν according to Equation 5.

Otherwise we have Equation 6 that illustrates how the spatial components 'oscillate' over time and consequently how the spatial distribution of phase fluctuations 'boils'. From this consideration we can obtain a numerical representation of the evolving process that occurs separately to each available spatial component according to its frequency.

Let us first imagine for simplicity and in order to avoid aliasing problems a one-dimensional spatial optical turbulence distribution. As a spatial distribution of a random turbulent phenomenon, its spatial Fourier transform is described by spatial spectral components with random phases and random amplitudes

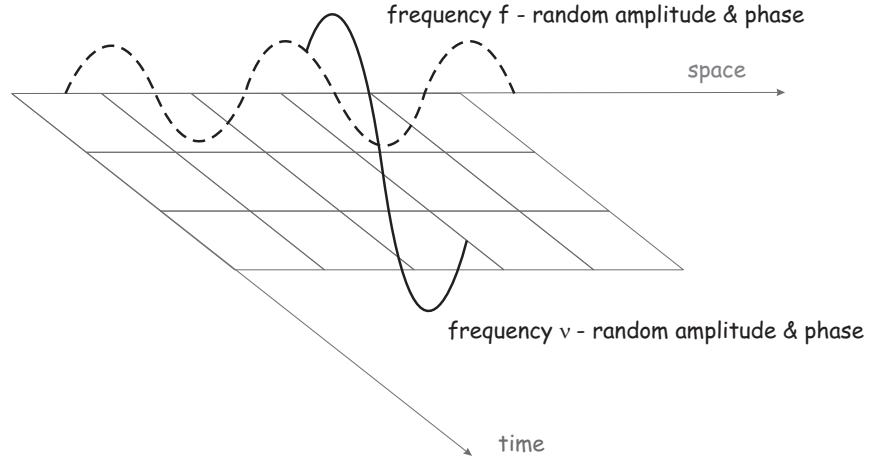


Figure 1: Every point of an initial spatial spectral component oscillates temporally at its associated temporal frequency. This temporal oscillation is a temporal spectral component with random amplitude and phase. Its energy (i.e. its statistical variance) is given by the energy (variance) of the spatial spectral component (the spatial power spectral density).

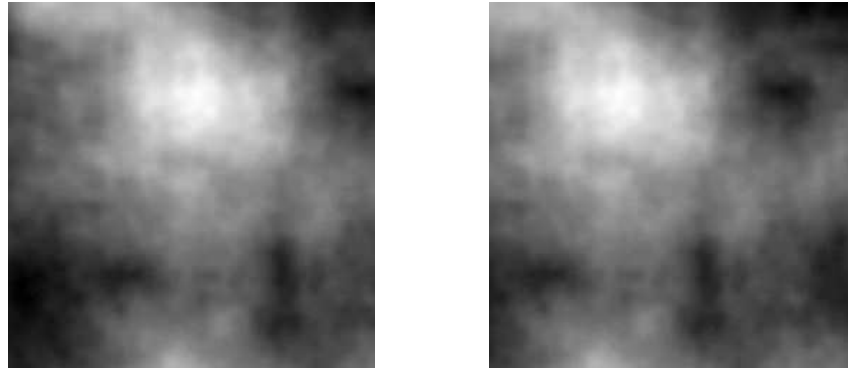


Figure 2: A simulated phase screen taken at two different instants as it evolves according to the Frozen Flow Hypothesis process. The figures show a transportation effect to the left.

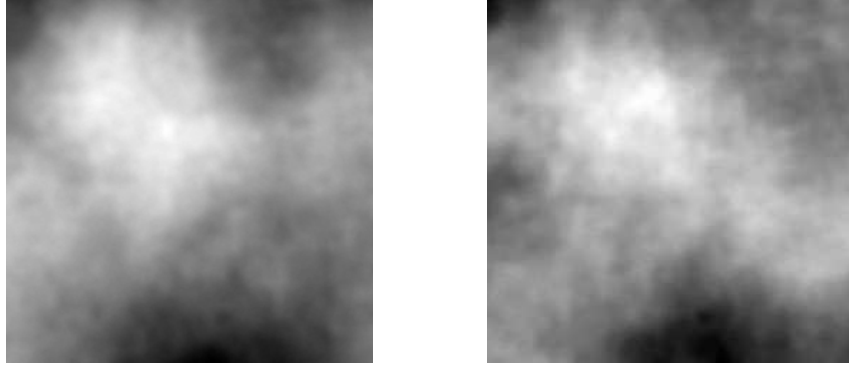


Figure 3: A simulated phase screen taken at two different instants as it evolves according to the Optical Turbulence Boiling process. The figures are slightly different and show no transportation effect.

that statistical variances obey to the statistically-determined model. This distribution is spatially unpredictable as we have already seen. At an arbitrary position along this distribution we can fix the value of a particular spatial spectral component with a determined spatial frequency. It is the value of the Sine (or Cosine) function with random amplitude and random phase that correspond to that spatial frequency. Now, at that particular position we may choose to make a measurement as a function of time. Since we have the relation between spatial and temporal frequencies it is obvious that for the contribution of that particular spatial spectral component at that particular position we mentally draw a Sine function of time that starts at that initial value with an arbitrary random phase and with the appropriate temporal frequency as it is shown in Figure 1. Note that the amplitude of this temporal spectral frequency is already random. At that particular position, every spatial spectral component will generate a temporal spectral component with random amplitude and phase. The combination of random temporal spectral components with random amplitudes (though related to the energy of the original spatial spectral components) and random phases gives rise to a random function of time which is unpredictable. If we take another position on that particular spatial spectral component we can also draw a Sine function of time at the same temporal frequency as before, but in order to ensure that at every moment the spatial frequency is kept unchanged we should introduce the same arbitrary phase as for the first position.

We have thus a spatial spectrum at every instant t and this make it possible to obtain numerically the spatial distribution at any moment by performing the following transform:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) = & \sqrt{2}FFT^{-1}\{\delta f\sqrt{W_{\varphi}(\mathbf{f})}\cos\{2\pi\nu_0f^{2/3}t + B_b(\mathbf{f})\} \\ & \times [A_1(\mathbf{f})\cos\{B_0(\mathbf{f})\} + iA_2(\mathbf{f})\sin\{B_0(\mathbf{f})\}]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

$B_b(\mathbf{f})$ are independent random numbers with uniform distribution that satisfy $0 \leq B_b(\mathbf{f}) < 2\pi$. Its randomness, which is attributed to the spatial spectral component, ensures that the temporal evolution is random and unpredictable while its statistical properties are reproducible through $W_{\varphi}(\mathbf{f})$ and through how energy is distributed over temporal frequencies.

Every point of an initial spatial spectral component oscillates temporally at its associated temporal frequency. This temporal oscillation is a temporal spectral component with random amplitude and phase. Its energy (i.e. its statistical variance) is given by the energy (variance) of the spatial spectral component (the spatial power spectral density). Spatial frequency is time-conservative for every spatial spectral component. Phase for temporal oscillation is then unique for every spatial spectral component. This condition ensures that spatial statistical properties are unchanged at any moment. Amplitude and phase randomness ensure that time variations is random and unpredictable and non-reproducible. Temporal and spatial statistical properties are reproducible and depend upon the power spectral density.

The result of such a simulation can be viewed as a three-dimensional grid with one of its axis being time. We obtain a temporal series of 2D phase screens that vary according to the Optical Turbulence Boiling. It is then possible, by taking measurements at different spatial positions on layers corresponding to different instants, to have the temporal evolution of differential image motion including the Optical Turbulence Boiling and horizontal translation.

6 Conclusion

Modelling the Optical Turbulence Boiling enables an enhancement of the optical turbulence temporal evolution numerical simulations. After a brief review of the available approaches to model the optical turbulence time evolution we have proposed a way to introduce the Optical Turbulence Boiling phenomenon into the actual FF-based method for simulating static phase-screens. The actual discussion is about application to Adaptive Optics, but the method can also be applied to ground-based interferometry and other high angular resolution techniques.

References

- [Berdja and Borgnino(2007)] Berdja, A. and J. Borgnino, 2007: Modelling the optical turbulence boiling and its effect on finite-exposure differential image motion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **378**, 1177–1186.
- [C. Aime and Ricort(1986)] C. Aime, F. M. R. P., J. Borgnino and G. Ricort, 1986: Contribution to the space-time study of stellar speckle patterns. *J. Opt. Soc. Am.*, **3**, 1001–1009.
- [C. Aime and Ricort(1980)] C. Aime, S. K. and G. Ricort, 1980: The influence of scanning rate in sequential analysis of a speckle pattern. application to speckle boiling. *Opt. Commun.*, **35**, 169–174.
- [D. Kouznetsov and Ortega-Martinez(1997)] D. Kouznetsov, V. V. V. and R. Ortega-Martinez, 1997: Simulations of turbulence-induced phase and log-amplitude distortions. *Appl. Opt.*, **36**, 464–469.
- [F. Roddier and Lund(1982)] F. Roddier, J. M. G. and G. Lund, 1982: On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry. *J. Optics (Paris)*, **13**, 263–271.
- [Fitzgerald and Graham(2006)] Fitzgerald, M. P. and J. R. Graham, 2006: Speckle statistics in adaptively corrected images. *ApJ*, **637**, 541–547.
- [Gendron and Léna(1996)] Gendron, E. and P. Léna, 1996: Single layer atmospheric turbulence demonstrated by adaptive optics observations. *Ap&SS*, **239**, 221–228.
- [J.-M. Conan and Madec(1995)] J.-M. Conan, G. R. and P.-Y. Madec, 1995: Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, **12**, 1559–1570.
- [J. Vernin and Müller(1991)] J. Vernin, G. W., J.-L. Caccia and M. Müller, 1991: Speckle lifetime and isoplanicity determinations - direct measurements and derivation from turbulence and wind profiles. *A&A*, **243**, 553–558.
- [Kellerer and Tokovinin(2007)] Kellerer, A. and A. Tokovinin, 2007: Atmospheric coherence times in interferometry: definition and measurement. *A&A*, **461**, 775–781.
- [Lindgren(1980)] Lindgren, L., 1980: Atmospheric limitations of narrow-field optical astrometry. *A&A*, **89**, 41–47.
- [Masciadri and Vernin(1997)] Masciadri, E. and J. Vernin, 1997: Optical techniques for inner-scale measurement: possible astronomical applications. *Appl. Opt.*, **36**, 1320–1327.
- [Nakajima(1988)] Nakajima, T., 1988: Signal-to-noise ration of the bispectral analysis of speckle interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, **5**.

- [R. Avila and Tokovinin(1997)] R. Avila, J. B. F. M. A. A., A. Ziad and A. Tokovinin, 1997: Theoretical spatiotemporal analysis of angle of arrival induced by atmospheric turbulence as observed with the grating scale monitor experiment. *J. Opt. Soc. Am.*, **14**, 3070–3082.
- [R. G. Lane and Dainty(1992)] R. G. Lane, A. G. and J. C. Dainty, 1992: Simulation of a kolmogorov phase screen. *Waves in Random Media*, **2**, 209–224.
- [Saint-Jacques and Baldwin(2000)] Saint-Jacques, D. and J. E. Baldwin, 2000: Taylor’s hypothesis: good for nuts. *Proc. SPIE*, **4006**, 951–962.
- [Schöck and Spillar(1999)] Schöck, M. and E. J. Spillar, 1999: Analysis of turbulent atmospheric layers with a wavefront sensor: testing the frozen flow hypothesis. *Proc. SPIE*, **3762**, 225–236.
- [Schöck and Spillar(2000)] ———, 2000: Method for a quantitative investigation of the frozen flow hypothesis. *J. Opt. Soc. Am.*, **17**, 1650–1658.
- [V. V. Voitsekhovich and Orlov(2005)] V. V. Voitsekhovich, D. K. and V. G. Orlov, 2005: Simulating the phase fluctuations produced by many stars in the weak atmosphere turbulent limit. *A&A*, **444**, 635–641.
- [V. V. Voitsekhovich and Cuevas(1999)] V. V. Voitsekhovich, V. G. O., D. Kouznetsov and S. Cuevas, 1999: Method of random wave vectors in simulations of anisoplanatic effects. *Appl. Opt.*, **38**, 3985–3992.
- [Vogel(2006)] Vogel, C. R., 2006: Time-varying stochastic turbulence model. *Proc. SPIE*, **6272**, 29–33.

5.7 Conclusion

Ce chapitre traite d'un aspect des plus sensibles de la turbulence optique et de ses effets sur l'observation astronomique en haute résolution angulaire au sol. Il s'agit de la variation temporelle au sens statistique de la turbulence optique dans le temps. Après avoir brièvement rappelé les divers aspects de ses effets sur quelques techniques de la Haute Résolution Angulaire, la variation temporelle de la turbulence optique est décrite selon deux processus dynamiques qui sont d'une part une variation apparente qui est due à un déplacement uniforme du champ de fluctuations relativement au champ de vision de l'observateur, et d'autre part la variation propre de la turbulence optique dans le référentiel suivant son déplacement. C'est cette variation dynamique propre qui sera désignée par le bouillonnement de la turbulence optique. La description usuelle de la variation temporelle de la turbulence optique se base sur l'approximation de la turbulence gelée. Cette approximation n'est valide que sur des durées de temps limitées, il était important de réfléchir à un cadre théorique qui prenne en compte l'effet du bouillonnement de la turbulence optique dans les modélisations liées à la Haute Résolution Angulaire. Cet impératif peut aussi sembler d'autant plus justifié que l'approximation de la turbulence gelée semble contredire l'image mentale intuitive que l'on peut se faire de la turbulence optique en tant que projection en défauts de phase des milieux dynamiques turbulents et en perpétuelle variation que traverse la lumière, et non pas comme une projection d'un milieu gelé dans le temps.

Le modèle théorique proposé dans ce chapitre est basé pour l'essentiel sur les connaissances que l'on a actuellement concernant la modélisation statistique de la turbulence optique induite par la propagation lumineuse à travers une turbulence pleinement développée. Cela suppose qu'en sont exclues la turbulence de coupole et la turbulence convective au sol. L'approche théorique se base sur une description qualitative de ce qui se passe au niveau de chaque composante harmonique spectrale du champ spatial des fluctuations issues de la turbulence optique au sol. A partir de là on établit une relation d'identification entre les fréquences spatiales et la contribution à la fréquence temporelle associée. Cette relation d'identification des fréquences induit une identification des densités spectrales, où l'on peut obtenir la densité spectrale temporelle de la grandeur mesurable considérée à partir de sa densité spectrale spatiale grâce à l'identification fréquentielle. Il s'agit schématiquement de piocher l'énergie de la turbulence optique dans l'espace des fréquences spatiales et de la redistribuer dans l'espace des fréquences temporelles. D'ailleurs, c'est exactement ce qu'on fait numériquement.

Cette approche nous a permis de retrouver les résultats de l'approximation de la turbulence gelée habituellement obtenues autrement (une approche mathématique légèrement différente). Elle permet aussi de calculer les densités spectrales temporelles lorsque la turbulence optique varie temporellement par bouillonnement, et même lorsqu'elle varie temporellement par bouillonnement et déplacement uniforme simultanément. La modélisation du bouillonnement de la turbulence optique requiert l'introduction d'un paramètre libre qu'on a appelé

ν_0 , et qui n'est en aucun cas une fréquence temporelle comme pourrait peut être suggérer son homonymie avec les fréquences temporelles ν , tel qu'adopté dans la notation tout au long de ce chapitre. Ce paramètre décrit à un niveau fondamental le taux de variation temporelle des composantes spectrales spatiales dans la turbulence optique. Il est indépendant de l'observable mesurée mais peut servir de passerelle pour décrire l'effet du bouillonnement de la turbulence optique dans les diverses techniques d'observation. On a par exemple utilisé des mesures prises avec un senseur de front d'onde Shack-Hartmann pour avoir une estimation de l'ordre de grandeur des valeurs de la constante de bouillonnement ν_0 afin de pouvoir modéliser l'astrométrie différentielle monopupille et en interférométrie longue-base. On montre même comment il est possible de caractériser les limites de l'optique adaptative multi-conjuguée prédictive qui se base sur le caractère déterministe de l'approximation de la turbulence gelée. Le bouillonnement de la turbulence gelée exprime l'indéterminisme temporel de la turbulence pleinement développée projetée dans la turbulence optique. La modélisation proposée permet l'intégration des deux aspects dans un cadre unique.

Une description générale du modèle est présentée avec quelques applications pratiques à des cas génériques. Le modèle doit encore être confronté à des mesures expérimentales précises. C'est dans ce cas là que des calculs plus extensifs seront menés en fonction de la nature des expériences et des mesures effectuées.

CONCLUSION

L'observation des variations du diamètre solaire est sujette à controverse. Les observations semblent en effet se contredire, et au lieu d'examiner de près la pertinence de telles ou telles méthodes d'observation, les spéculations vont bon train. Les mesures astrométriques du diamètre photométrique du Soleil (lié à une propriété géométrique de la fonction d'assombrissement centre-bord apparente) ont été jusqu'à maintenant intensivement effectuées à l'aide des astrolabes solaires. Ces instruments sont une adaptation des astrolabes stellaires utilisés en astrométrie de position des étoiles. Cependant, les mesures solaires et stellaires ne sont pas affectées de la même manière par la propagation de la lumière à travers l'atmosphère turbulente terrestre. La position apparente d'une étoile, si l'on ignore l'effet de la réfraction atmosphérique, fluctue aléatoirement autour de sa position angulaire vraie. Une intégration temporelle suffisante permet alors de moyenniser les fluctuations d'angle d'arrivée et de s'approcher de la position non-perturbée de la dite étoile. Dans le cas de la mesure du diamètre du Soleil, il s'agit de mesurer la position d'un point géométrique défini par convention. Il s'agit normalement pour les astrolabes du point d'inflexion de la fonction d'assombrissement centre-bord.

Je montre qu'en présence de turbulence optique, la position du point d'inflexion fluctue autour d'une position qui n'est pas sa position en l'absence de turbulence optique. De plus, cette position moyenne dépend des conditions de la turbulence optique, qui varient vraisemblablement d'une série de mesures à une autre. C'est dû à l'effet combiné de la variation de la largeur moyenne des PSFs instantanées dans les images du bord solaire et de la forme de la fonction d'assombrissement dans la bande d'observation. Il en résulte que le fait de faire la moyenne sur les positions du point d'inflexion issues de plusieurs mesures ne conduit pas à la position du point d'inflexion non-perturbé. La mesure moyenne du diamètre photométrique solaire est biaisée par cet effet qu'on a qualifié de systématique et qu'il est difficile de quantifier sans la connaissance des conditions dans lesquelles ont été prises les mesures en terme de turbulence optique.

Même sans connaître en détail les distorsions qu'apporte la turbulence optique aux mesures de diamètre solaire, on a naturellement expliqué les disparités entre les mesures des astrolabes de la variabilité du diamètre solaire par rapport au cycle d'activité par les effets de la turbulence atmosphérique. Ceci a conduit à l'idée d'effectuer des mesures du diamètre solaire à partir de l'espace, loin

des effets de la turbulence atmosphérique. C'est ce qui est prévu de faire avec l'instrumentation embarquée à bord du microsatellite PICARD. Avant son lancement, nous n'avons pas idée de la précision réelle des mesures que va prendre le satellite, mais ce qui est intéressant pour nous c'est surtout la synergie sol-espace qui est prévue pour cette expérience. Le satellite ne peut couvrir les éventuelles variations durant tout le cycle solaire et même s'il sera lancé vers le début du prochain cycle, rien ne dit dans quelle partie du cycle de variation du diamètre (s'il existe) se situe la durée du vol. Il est prévu que les mesures prises depuis l'espace soient associées à des mesures simultanées prises depuis le sol avec une instrumentation identique. L'instrument au sol, SODISM II, qui capture une image longue-pose du Soleil, est affecté par les effets de la turbulence optique locale et donnera donc forcément des résultats différents de ceux pris depuis l'espace. Un moniteur de paramètres de la turbulence optique MISOLFA est aussi en construction pour caractériser les conditions d'observation au sol. Je montre à l'aide d'une modélisation numérique qu'il est possible d'établir une relation directe et systématique entre les propriétés statistiques et spectrales de la turbulence optique et l'écart de la position du point d'inflexion sur les images longue-pose par rapport à la position du bord solaire en l'absence de turbulence. Ceci permet, connaissant les propriétés de la turbulence optique durant les observations, de corriger les biais introduits sur les mesures du diamètre solaire photométrique à partir du sol. Cela permet aussi de s'affranchir du satellite et d'effectuer des mesures aussi longtemps que l'on veut. Des mesures satellitaires peuvent servir néanmoins à valider la précision des corrections apportées aux mesures effectuées depuis le sol. Pour que ce soit faisable, il est nécessaire d'avoir des mesures fiables de la turbulence optique. Les mesures de la turbulence optique se font à travers l'observation des fluctuations d'angle d'arrivée mesurées en observant le Soleil. Cela peut se faire selon deux approches.

Dans la première approche, les fluctuations d'angle d'arrivée paraissent pouvoir être mesurées directement à partir de l'agitation apparente sur les images instantanées du bord solaire.

Je montre cependant que cela n'est pas aussi trivial qu'il y paraît. En effet les fluctuations de la position du point d'inflexion comme définie pour les mesures du diamètre solaire ne peuvent pas être rattachées dans le cas général aux fluctuations d'angle d'arrivée. Elles ne rendent compte que du mouvement d'un point arbitraire des réponses impulsionnelles formant les images du bord solaire, et non pas de leur mouvement d'ensemble, que définissent les fluctuations d'angle d'arrivée.

Je montre également que les fluctuations de la position du photocentre (du barycentre photométrique) de la dérivée de l'image du bord rendent mieux compte des fluctuations d'angle d'arrivée. Cette approche est toutefois limitée par deux facteurs. Tout d'abord, la fonction d'assombrissement centre-bord de la photosphère solaire qui est monotone décroissante, et ensuite le fait que pour implémenter cette méthode il faut faire une dérivation numérique sur des images CCD polluées par les différents bruits. Nous montrons que la limitation systématique (et néanmoins non-linéaire) de l'effet de l'assombrissement peut être compensée en effectuant une transformation de l'image qui nous mène de

l'image du bord solaire affectée par la turbulence optique à une image d'un bord solide de type Heaviside qui est affecté par la même turbulence optique. Cette approche n'est formellement applicable que dans le cas d'un isoplanétisme local de la turbulence optique. La présence de bruits dans l'image par contre requiert que l'extraction des fluctuations d'angle d'arrivée se fasse sans dérivation des images. Parmi toutes les approches que j'ai pu imaginer, celle qui m'a semblé la plus efficace et la plus stable par rapport aux bruits dans les images, est celle de l'intégration photométrique avec seuillage. Cette méthode, non seulement ne dérive pas le bruit, mais l'intègre et donc diminue son effet. Dans le cas où l'effet de l'assombrissement est compensé et que les images sont ramenées à celles d'un bord solide en présence de la même turbulence optique, le seuillage des images se détermine aisément à partir de la largeur moyenne des réponses impulsionnelles que l'on peut estimer en dérivant les images du bord. Cette approche, qui consiste à compenser l'effet de l'assombrissement puis procéder par intégration photométrique, ne peut être valable de toute façon que dans le cas d'un isoplanétisme local de la turbulence optique, qui correspond au premier ordre à un angle isoplanétique supérieur à deux fois la largeur moyenne des réponses impulsionnelles.

Ce que je montre en effet, c'est que dans le cas d'un anisoplanétisme local, l'agitation dans les images du bord solaire n'est déterminée que par les fluctuations d'angle d'arrivée, mais celles-ci sont fortement contaminées par les contributions des tavelures dispersées autour des sources entourant la zone de mesure. Cet anisoplanétisme local correspond à de mauvaises conditions d'observation et se voit comme une asymétrie de la dérivée moyenne des images du bord après la compensation de l'effet d'assombrissement dans les images du bord solaire. Cette observation indique déjà si les conditions d'observation sont très mauvaises ou s'il faut mesurer les fluctuations d'angle d'arrivée à partir des images du bord solaire.

Ces considérations seront très bientôt (décembre 2007) applicables aux nouvelles acquisitions du profileur de turbulence optique par observation du bord lunaire MOSP à l'observatoire Paranal de l'ESO, l'objectif de cette mission étant l'analyse des fronts d'onde à grande échelle. Elle impliquera aussi le GSM, le SCIDAR, l'interféromètre AMBER, et probablement d'autres instruments. Des observations, avec cet instrument, sont aussi prévues pour la qualification du Dôme C en antarctique. La méthode de mesure sera ensuite étendue aux observations solaires, et éventuellement applicables au moniteur MISOLFA quand il sera mis en fonctionnement.

L'extraction des fluctuations d'angle d'arrivée à partir des images du bord solaire permet d'avoir accès à une observable dont les propriétés statistiques et spectrales peuvent être modélisées. Cette modélisation doit être la plus proche possible des fluctuations d'angle d'arrivée que l'on mesure pour pouvoir extrapoler ces résultats à la qualité des images par exemple (*seeing* ou effets sur le diamètre ou autres) de la manière la moins corrompue possible.

Dans ce contexte je me suis intéressé à l'une des approximations que l'on fait habituellement pour modéliser les fluctuations d'angle d'arrivée, à savoir l'approximation du champ proche. Cette approximation a l'avantage, en igno-

rant les effets de la diffraction affectant le rayonnement arrivant au sol depuis une couche turbulente située en altitude, de considérer que toutes les contributions à différentes longueurs d'onde aux fluctuations d'angle d'arrivée sont les mêmes. Ceci permet non seulement de simplifier la formalisation de ces fluctuations, mais aussi de pouvoir considérer leurs mesures en large bande et même en lumière blanche.

J'ai montré que non seulement la diffraction pour chaque longueur d'onde modifiait les propriétés statistiques (et notamment la variance) des fluctuations d'angle d'arrivée, et les rendaient dépendantes de la longueur d'onde d'observation, mais encore que les fluctuations d'angle d'arrivée polychromatiques à large bande étaient statistiquement affectées par les décorrélations mutuelles que subissent les différentes composantes aux différentes longueurs d'onde à cause de la diffraction de Fresnel. La caractérisation des effets de la turbulence optique ne peut finalement se faire correctement à partir des mesures des angles d'arrivée que si l'on considère un système qui prenne en compte non seulement cet aspect de décorrélation chromatique en large bande, mais surtout de l'aspect profilométrique de la turbulence optique.

La deuxième solution envisagée pour caractériser la turbulence optique en observant le Soleil repose sur une technique différente. Il s'agit d'observer les déformations du front d'onde dans un plan conjugué de la pupille d'entrée d'un télescope. Cela est rendu possible en réalisant l'équivalent d'un test de Foucault en plaçant un masque au plan focal du télescope, soit au niveau de l'image solaire. Le résultat est que l'on observe des variations d'intensité dans l'image conjuguée de la pupille d'entrée qui sont liées aux perturbations de la turbulence optique à l'entrée du télescope. J'ai étudié le cas où l'on met une fente dans le plan pupille au niveau de l'image d'un bord solaire. Le choix de ce filtre se justifie par le fait qu'à l'approximation géométrique, on peut montrer que dans le cas d'un éclaircissement uniforme ou linéairement variable, les variations d'intensité obtenues dans le plan pupille correspondent aux fluctuations d'angle d'arrivée à l'entrée de la pupille si l'approximation du champ proche est satisfaite. Ceci est réalisé moyennant certaines précautions liées à la diffraction à travers la fente dont la largeur est fixée afin de limiter les effets de l'anisoplanétisme local. Cette transformation des fluctuations d'angle d'arrivée en variations d'intensité n'est possible que dans le cas d'isoplanétisme local, où l'angle de *seeing* est inférieur à l'angle d'isoplanétisme de la turbulence optique.

Je montre ainsi à travers des modélisations et des simulations numériques la faisabilité et les limitations optiques de cette approche dans le cadre de l'approximation du champ proche. Il est aussi discuté le cas où l'approximation du champ proche n'est pas satisfaite, et des solutions envisagées dans ce cas. La plupart des travaux sur l'observation plan-pupille des fluctuations de la phase se basent sur l'approximation du champ proche où l'on néglige la scintillation. L'impact qu'a cet effet sur les observations mentionnées est discuté et des solutions à approfondir sont enfin proposées. En effet, si on montre que l'on retrouve les fluctuations d'angle d'arrivée sous forme de variations d'intensité dans le plan pupille, l'observable dans le cas où la scintillation ne peut être ignorée est une quantité qu'il faudra modéliser et qui prend en compte les fluctuations de la

phase et celles de l'amplitude.

J'ai donné une forme générale de ce à quoi devrait ressembler la solution et la prochaine étape est de formaliser de manière plus rigoureuse les variations d'intensité que l'on observe dans le plan pupille. Quoi qu'il en soit, la résolution spatiale des mesures de turbulence optique que l'on fait avec cette méthode est très importante et permet d'envisager de caractériser la turbulence optique des basses couches atmosphériques par profilométrie à haute résolution.

Nous prévoyons, en parallèle avec la modélisation théorique des variations d'intensité mesurées dans le plan pupille, la construction d'un profileur de turbulence optique des basses couches atmosphériques basé sur cette technique. On va aussi explorer d'autres possibilités de filtrage au plan focal dont la possibilité d'utiliser le centre du disque solaire au lieu du bord solaire.

Sur un plan plus fondamental, du moins en ce qui peut concerner la Haute Résolution Angulaire, je me suis aussi intéressé aux aspects temporels de la turbulence optique. Cette donnée peut avoir des répercussions non seulement sur les observations solaires telles que nous les avons décrites précédemment, mais aussi à un grand nombre de techniques d'observation en présence de turbulence optique atmosphérique.

Afin de modéliser la variation temporelle de la turbulence optique, je propose une modélisation mathématique qui permet de décrire les propriétés statistiques temporelles de la turbulence optique à partir des propriétés spectrales spatiales de celle-ci si on connaît la fréquence temporelle liée à chaque composante spectrale spatiale. Cette relation " d'identification fréquentielle " permet de décrire la densité spectrale temporelle de l'observable mesurée à partir de sa densité spectrale spatiale. Dans un premier temps j'ai utilisé cette approche pour retrouver le résultat bien connu de l'approximation de la turbulence gelée lorsque le bouillonnement de la turbulence optique est ignoré. Ensuite, j'ai examiné ce que peut apporter la description statistique de la turbulence pleinement développée pour l'étude du comportement temporel des composantes spectrales spatiales de la turbulence, ce qui permet d'établir une relation d'identification fréquentielle entre les fréquences spatiales et fréquences temporelles. Il est donc possible d'obtenir une description des propriétés statistiques temporelles de la turbulence optique lorsque seul le bouillonnement de la turbulence optique est considéré. Cette situation s'applique à l'optique adaptative multi-conjuguée pour les grands télescopes où l'approximation de la turbulence gelée permettrait en principe d'anticiper les déformations du front d'onde connaissant la vitesse du vent pour chaque couche. Cette technique sera limitée par le bouillonnement de la turbulence optique et une connaissance de celui-ci permettra de mieux implémenter cette technique. Il sera nécessaire de connaître non seulement la vitesse de déplacement de chaque couche turbulente, mais aussi le temps de décorrélation par bouillonnement de la turbulence optique associée.

Dans la situation la plus générale, la variation temporelle de la turbulence optique est due aux deux effets que sont le déplacement relatif des couches turbulentes par rapport au champ de vision d'observation et le bouillonnement de la turbulence optique. Je décris cette situation avec le modèle théorique que je propose de manière aussi directe que les deux cas précédents. Dans ce cas,

les propriétés statistiques temporelles de la turbulence optique dépendent des propriétés spectrales spatiales de la turbulence optique issue de chaque couche de l'atmosphère turbulente, de la vitesse de déplacement de celles-ci, et de ce qu'on a appelé la constante de bouillonnement associée à chacune de ces couches. J'ai appliqué ce modèle au cas de l'astrométrie différentielle mono-pupille et observé l'importance de cet effet de bouillonnement de la turbulence optique dans la description de la précision optique en fonction de la direction du vent par rapport à la séparation angulaire entre les astres observés. J'ai aussi montré que ce modèle peut aussi être appliqué pour décrire d'autres techniques d'observation en prenant comme exemple l'interférométrie longue-base.

Ce modèle est une hypothèse de travail qui s'appuie certes sur des considérations de physique mais aussi à notre sens, sur une description mathématique rigoureuse. Il n'est reste pas moins que la prochaine étape est de le faire valider ou invalider, ou du moins en mesurer la pertinence, par l'expérience. Des solutions sont actuellement à l'étude. Elles impliquent soit un système de mesure à plusieurs modules synchronisés comme GSM (*Generalized Seeing Monitor*) ou l'utilisation d'un senseur de front d'onde de type Shack-Hartmann conjugué à un télescope de grand diamètre afin de suivre suffisamment le déplacement des couches turbulentes et d'isoler la décorrélation temporelle due au bouillonnement de la turbulence optique. Ces expériences sont envisagées pour 2008, du moins en ce qui concerne l'utilisation de GSM et la mission en préparation est prévue à l'observatoire du Mont Wilson où se trouve l'interféromètre CHARA.

Outre la modélisation mathématique de ces effets on présente comme retombée pratique le moyen de faire des simulations numériques de la variation temporelle des fluctuations de la phase ou d'autres observables du fait du bouillonnement.

Annexe A

Calcul de la densité spectrale temporelle de la phase variant par bouillonnement seul

On présente dans cette annexe les fragments les plus significatifs du programme informatique avec lequel on a codé l'intégration numérique de l'équation 5.33. C'est le programme le plus simple dans sa structure du fait qu'il fait intervenir une intégration unidimensionnelle dans l'espace des fréquences spatiales. Le programme est fait de sorte qu'il puisse être facilement généralisable à toutes les quantités évoquées dans le chapitre 5. Les programmes ont été écrits en langage PASCAL pour un compilateur orienté objet. Je vais ignorer les considérations liées à l'interface, à l'introduction des paramètres d'entrée, et à l'enregistrement du résultat.

Tout d'abord, il faut définir un type de variables sous forme de tableau dynamique dont la taille n'est déterminée que durant l'exécution du programme en fonction des paramètres d'entrée.

```
type  
spectre=array of Extended;
```

Les quantités qui nous intéressent directement sont d'abord les paramètres d'entrée que sont le pas d'échantillonnage de la fréquence temporelle $d\nu$, la fréquence temporelle maximale ν_{max} , le paramètre de bouillonnement ν_0 , l'échelle externe spatiale des fluctuations de la turbulence optique L_0 . Dans notre exemple on a préféré ignorer l'effet de l'échelle interne pour plus de clarté. Ces paramètres sont respectivement représentés dans le programme par les variables **dnu**, **numax**, **nu0** et **L0**.

Le dernier paramètre d'entrée est le nombre de balayages de l'espace des fréquences temporelles N représenté dans le programme par la variable **N**. En effet, l'intégration numérique se base sur un échantillonnage semi-aléatoire de l'espace

des fréquences spatiales. La raison en est qu'un échantillonnage fixe ne retranscrit l'information dans la densité spectrale temporelle que de quelques points singuliers de la densité spectrale spatiale et non pas l'information de l'énergie de la turbulence optique dans sa totalité. On réalise donc un échantillonnage semi-aléatoire des fréquences spatiales pour chaque balayage. Il s'agit de définir une grille régulière qui assure un équilibre statistique entre les différents domaines de fréquence. A l'intérieur de chaque intervalle défini par cette grille, on pioche aléatoirement une fréquence spatiale. Après plusieurs passages (balayages), on peut considérer qu'on a échantillonné assez de fréquences spatiales différentes dans l'intervalle de fréquence élémentaire considéré que le résultat tend à correspondre à celui d'un échantillonnage régulier dans cet intervalle.

Une autre quantité importante est la densité spectrale temporelle des fluctuations de phase $\omega_\varphi(\nu)$. Elle sera représentée dans le programme par le tableau dynamique `omega`.

```
var
dnu:Extended;
numax:Extended;
L0:Extended;
nu0:Extended;
N:word;
omega:spectre;
```

Il existe aussi d'autres variables globales utiles dans le programme telles que la variable `tailleomega`, liée à la taille en nombre d'éléments de `omega`. En fait la taille de `omega` c'est `2*tailleomega+1`.

```
tailleomega:integer;
```

Il est utile par exemple de disposer de procédures calculant les fonctions spéciales. Dans notre cas on aura besoin de la fonction de Bessel du premier ordre au premier degré $J_1\{\dots\}$. On utilise la procédure classique donnée par le Numerical Recipes [141].

Une fois les paramètres d'entrée introduits, on assigne une taille en nombre d'éléments au vecteur `omega`. Cela donne la procédure `vectorize`.

```
procedure vectorize;
var
i:word;
begin
tailleomega:=round(numax/dnu);{taille de omega}
Setlength(omega,2*tailleomega+1);
for i:=1 to 2*tailleomega+1 do begin omega[i-1]:=0; end;
end;
```

Avec ces préparatifs on peut s'occuper de la procédure `balayage` qui consiste à faire un balayage unique de l'espace des fréquences spatiales (ici le balayage est unidimensionnel), calculer la densité spectrale de la phase pour chaque fréquence spatiale échantillonnée, et l'ajouter à la variable `omega` en fonction de

la relation d'indentification entre les fréquences spatiales et temporelles définie pour l'occasion. Cette procédure commence par la déclaration de toutes les variables et constantes locales, notamment la densité spectrale spatiale W associée à chaque fois à la valeur de la fréquence spatiale échantillonnée f .

```

procedure balayage;
const
df=0.05;
fmax=100;
var
taillef:integer;
i1,i2:integer;
if0:integer;
f,f2:Extended;
dfactu,factu,ffutu:Extended;
A:Extended;
W:Extended;
nu1,nu2:Extended;
begin

```

Afin d'uniformiser quelque peu la convergence de la densité spectrale temporelle après un nombre donnée de balayages, l'échantillonnage des fréquences spatiales radiales dépend de l'échantillonnage des fréquences temporelles. Au premier ordre on considère cette dépendance comme découlant de la relation d'identification fréquentielle dans le cas de la turbulence à l'intérieur du domaine inertiel avec tout de même une précaution donnée à l'effet de l'échelle externe dans le choix des bornes extrêmes du domaine d'échantillonnage. La fréquence spatiale f pour l'échantillonnage constant se calcule après chaque échantillonnage. C'est un échantillonnage évolutif en fonction des paramètres entrés. La boucle en $if0$ est justement celle qui définit le balayage dans le sens du passage d'un intervalle d'échantillonnage à un autre pour les fréquences spatiales radiales f .

```

taillef:=round(fmax/df);
if taillef < (tailleomega+1) then taillef:=tailleomega+1;
if nu0<>0 then if taillef < round(2*Exp(3/2*Ln(numax/nu0))/df) then
taillef:=round(2*Exp(3/2*Ln(numax/nu0))/df);
factu:=0;
for if0:=1 to taillef do
begin
dfactu:=df;
ffutu:=factu+df;
if nu0<>0 then if ((Exp(3/2*Ln(if0*dnu/nu0)))-factu)<= dfactu then
begin dfactu:=(Exp(3/2*Ln(if0*dnu/nu0)))-factu;
ffutu:=Exp(3/2*Ln(if0*dnu/nu0)); end;

```

La variable A définit l'élément de différentiation numérique, correspondant à $\pi f df$ divisé par l'élément $d\nu$ si on peut faire une analogie avec l'écriture analytique initiale.

```
A:=Pi*(sqr(ffutu)-sqr(factu))/(dnu);
```

La fréquence spatiale radiale **f** est aléatoirement échantillonnée dans le domaine de fréquences de longueur **dfactu**.

```
f:=factu+dfactu*(1-random);
f2:=sqr(f);
```

Une fois une valeur assignée à la fréquence spatiale **f**, on calcule les fréquences temporelles **nu1** et **nu2** auxquelles la composante spectrale correspondante contribue, ainsi que les indices **i1** et **i2** correspondants dans **omega**.

```
if f<>0 then begin
nu1:=+nu0*(Exp(2/3*Ln(f)))*(1-Exp(-sqr(f*L0)));
nu2:=-nu0*(Exp(2/3*Ln(f)))*(1-Exp(-sqr(f*L0)));
i1:=round(nu1/dnu)+tailleomega+1; i2:=round(nu2/dnu)+tailleomega+1;
```

Il suffit alors de calculer la valeur de la densité spectrale spatiale et l'assigner à **omega** là où il faut.

```
if (i1>=1) and (i1<=2*tailleomega+1) then
begin
W:=Exp((-11/6)*Ln(f2+(1/(sqr(L0)))));
omega[i1-1]:=omega[i1-1]+W*A;
if (i2>=1) and (i2<=2*tailleomega+1) then
omega[i2-1]:=omega[i2-1]+W*A; end
else
if (i2>=1) and (i2<=2*tailleomega+1) then
begin
W:=Exp((-11/6)*Ln(f2+(1/(sqr(L0)))));
omega[i2-1]:=omega[i2-1]+W*A;
end;
end;
factu:=ffutu;
end;
end;
```

Enfin, l'implémentation consiste d'abord à initialiser **omega** dans la procédure **vectorize**, puis à effectuer plusieurs balayages avec la procédure **balayage**.

```
randomize;
vectorize;
for i:= 1 to N do balayage;
```

Le résultat donné est **omega*N**. Il suffit alors de diviser par **N**, et comme la densité spectrale temporelle est symétrique, de moyenner la partie fréquences négatives et la partie fréquences positives avant d'enregistrer le résultat.

Les bouts de code sont reproduits à titre indicatif et certaines boucles peuvent ne pas être correctement fermées avec **end**.

Bibliographie

- [1] D. S. Acton & R. C. Smithson, "Solar imaging with a segmented adaptive mirror," *Applied Optics* 31, 3161–3169, 1992
- [2] C. Aime, S. Kadiri & G. Ricort, "The influence of scanning rate in sequential analysis of a speckle pattern. Application to speckle boiling," *Opt. Commun.* 35, 169–174, 1980
- [3] C. Aime, J. Borgnino, F. Martin, R. Petrov & G. Ricort, "Contribution to the space-time study of stellar speckle patterns," *J. Opt. Soc. Am.* 3, 1001–1009, 1986
- [4] S. Altarac, P. Berlio-Arthand, E. Thiébaud, R. Foy, Y. Y. Balega, J. C. Dainty & J. J. Fuensalida, "Effect of Telescope Vibrations upon High Angular Resolution Imaging," *Mon. Not. R. Soc.* 322, 141–148, 2001
- [5] L. C. Andrews, R. L. Phillips, C. Y. Hopen & M. A. Al-Habash, "Theory of Optical Scintillation," *J. Opt. Soc. Am. A.* 16, 1417–1429, 1999
- [6] F. Assémat, R. W. Wilson & E. Gendron, "Method for Simulating Infinitely Long and Non Stationary Phase Screens with Optimized Memory Storage," *Optics Express* 14, 988–999, 2006
- [7] R. Avila, A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin, A. Agabi & A. Tokovinin, "Theoretical spatiotemporal analysis of angle of arrival induced by atmospheric turbulence as observed with the grating scale monitor experiment," *J. Opt. Soc. Am. A.* 14, 3070–3082, 1997
- [8] R. Avila, J. Vernin & E. Masciadri, "Whole atmospheric-turbulence profiling with generalized scidar," *Applied Optics* 36, 7898–7905, 1997
- [9] R. Avila & J. Vernin, "Mechanism of Formation of Atmospheric Turbulence Relevant for Optical Astronomy," *Interstellar Turbulence, Proceedings of the 2nd Guillermo Haro Conference*, Cambridge University Press, page 5, 1999
- [10] S. Baliunas & W. Soon, "Are Variations in the Length of the Activity Cycle Related to Changes in Brightness in Solar-Type Stars?," *The Astrophysical Journal* 450, 896–901, 1995
- [11] G. K. Batchelor, "The Theory of Homogeneous Turbulence," Cambridge University Press, 1970
- [12] J. M. Beckers, "A Photoelectric Focus and Seeing Monitor for Solar Telescopes," *Applied Optics* 5, 301–304, 1966
- [13] A. Berdja, A. Irbah & J. Borgnino, "Simulation of the Anisoplanatic Angle-of-Arrival Fluctuations Measured on the Solar Edge Images," *SF2A 2002-Paris, EDPS Conference Series in Astronomy & Astrophysics*, 205–206, 2002

- [14] A. Berdja, "Analyse des Dégénéralions de la Turbulence Atmosphérique sur les Mesures Astronomiques en Haute Résolution Angulaire" Thèse de Magister, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, 2002
- [15] A. Berdja, A. Irbah & J. Borgnino, "Simulation of Angle-of-Arrival fluctuations as observed in the MISOLFA pupil plan," SF2A 2002-Bordeaux, EDPS Conference Series in Astronomy & Astrophysics, 355–357, 2003
- [16] A. Berdja, A. Irbah, J. Borgnino & F. Martin, "Simulation of pupil-plane observation of angle-of-arrival fluctuations in daytime turbulence," SPIE 5237, 238–248, 2004
- [17] A. Berdja, J. Borgnino & A. Irbah, "Fresnel diffraction and polychromatic effects on angle-of-arrival fluctuations," Journal of Optics A : Pure and Applied Optics, 8, 244–251, 2006
- [18] A. Berdja & J. Borgnino, "Modelling the optical turbulence boiling and its effect on finite-exposure differential image motion," Mon. Not. R. Astron. Soc. 378, 1177–1186, 2007
- [19] J. Borgnino & F. Martin, "Analyse statistique des déformations aléatoires d'une surface d'onde dues à la turbulence atmosphérique au voisinage du sol. I.- Exposé de la méthode, Premiers résultats," J. Optics (Paris), 8, 319–326, 1977
- [20] J. Borgnino & F. Martin, "Correlation between angle-of-arrival fluctuations on the entrance pupil of a solar telescope," J. Opt. Soc. Am. 8, 1065–1072, 1977
- [21] J. Borgnino & J. Vernin, "Experimental verification of the inertial model of atmospheric turbulence from solar limb motion," J. Opt. Soc. Am. 68, 1056–1062, 1978
- [22] J. Borgnino, "Etude de la dégradation des images astronomiques diurnes par analyse statistique des fluctuations d'angle d'arrivée," PhD Thesis, Université de Nice, 1978
- [23] J. Borgnino, M. Azouit, R. Bartelli, G. Ceppatelli, L. Paternò, A. Righini, N. Speroni & J. Vernin, "Turbulence Around a Solar Telescope as Deduced from Angle of Arrival Statistics. A Comparison with Microthermal Measurements," Astron. Astrophys. 79, 184–189, 1979
- [24] J. Borgnino, "Estimation of the Spatial Coherence Outer Scale Relevant to Long Baseline Interferometry and Imaging in Optical Astronomy," Applied Optics 29, 1863–1865, 1990
- [25] J. Borgnino, F. Martin & A. Ziad, "Effect of a Finite Spatial-Coherence Outer Scale on the Covariances of Angle-of-Arrival Fluctuations," Optics Communications 91, 267–269, 1992
- [26] J. Borgnino, "Modelling the Optical Effects of Atmospheric Turbulence in High Angular Resolution Astronomical Observation : Wavefront and Related Parameters," Astronomy with High Contrast Imaging II, EAS Publications Series 12, 103–124, 2004
- [27] M. Born & E. Wolf, "Principles of Optics," Pergamon Press, 1980
- [28] A. Bouzid, A. Irbah, J. Borgnino & H. Lantéri, "Atmospheric turbulence profile estimation from fluctuation analysis of extended object images," Proceedings 14th Symposium on European and Balloon Programmes and Related Research, ESA SP-437, Germany 31 May-03 June, 1999

- [29] A. Bouzid, A. Irbah, J. Borgnino & H. Lantéri, "Atmospheric turbulence profiles deduced from solar limb observations," *Astronomical Site Evaluation in the Visible and Radio Range*, Morocco November 13-17, 2000
- [30] R. N. Bracewell, "The Fourier Transform and its Applications," McGraw-Hill electrical and electronic engineering series, 1978
- [31] P. N. Brandt, "Frequency spectra of solar image motion," *Solar Physics* 7, 187–203, 1969
- [32] P. N. Brandt, "Measurement of solar image motion and blurring," *Solar Physics* 13, 243–246, 1970
- [33] P. N. Brandt & H. Wöhl, "Solar Site-testing Campaign of JOSO on the Canary Islands in 1979," *Astron. Astrophys.* 109, 77–89, 1982
- [34] P. N. Brandt, H. A. Mauter & R. Smartt, "Day-time seeing statistics at Sacramento Peak Observatory," *Astron. Astrophys.* 188, 163–168, 1987
- [35] T. M. Brown, "Seeing-independent Definitions of the Solar Limb Position," *Astron. Astrophys.* 116, 260–26, 1982
- [36] T. Butterley, R. W. Wilson & M. Sarazin, "Determination of the profile of atmospheric optical turbulence strength from SLODAR data," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 369, 835–845, 2006
- [37] V. F. Canales, D. M. de Juana & M. P. Cagigal, "Superresolution in Compensated Telescopes," *Optics Letters* 29, 935–937, 2004
- [38] M. P. J. L. Chang, C. O. Font, G. C. Gilbreath & E. Oh, "Humidity's influence on visible region refractive index structure parameter C_n^2 ," *arXiv :physics/0606075 v2*, 2006
- [39] G. Chen, W. Duan & S. Zhang, "Real-time observing of the phase information of object with incoherent illumination," *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.* 4, 320–323, 2002
- [40] T. W. Cole, "Periodicities in Solar Activity," *Solar Physics* 30, 103–110, 1973
- [41] R. Conan, A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin & A. Tokovinin, "Measurements of the wave-front outer scale at Paranal : influence of this parameter in interferometry," *SPIE* 4006, 963–973, 2000
- [42] R. Conan, "Modélisation des Effets de l'Échelle Externe de Cohérence Spatiale du Front d'Onde pour l'Observation à Haute Résolution Angulaire en Astronomie. Application à l'Optique Adaptative, à l'Interférométrie et aux Très Grands Télescopes," *Thèse de Doctorat*, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2000
- [43] J.-M. Conan, G. Rousset & P.-Y. Madec, "Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence," *J. Opt. Soc. Am. A* 12, 1559–1570, 1995
- [44] C. E. Coulman, "A quantitative treatment of 'solar seeing', I," *Solar Physics* 7, 122–143, 1969
- [45] C. E. Coulman, "A quantitative treatment of 'solar seeing', II," *Solar Physics* 34, 491–506, 1974
- [46] C. E. Coulman, "Fundamental and Applied Aspects of Astronomical 'Seeing'," *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 23, 19–57, 1985
- [47] A. N. Cox, "Allen's Astrophysical Quantities," AIP press, Springer, 2000

- [48] G. -m. Dai & V. N. Mahajan, "Zernike Annular Polynomials and Atmospheric Turbulence," *J. Opt. Soc. Am. A.* 24, 139–155, 2007
- [49] G. Daigne & J.-F. Lestrade, "Integration of the atmospheric fluctuations in a dual-field optical interferometer : short exposure regime," *A&A* 406, 1167–1174, 2003
- [50] W. DaliAli, "Etude de la dégradation par la turbulence atmosphérique des images du bord solaire : estimation du paramètre de Fried," *Mémoire de Magister*, USTHB, 2007
- [51] C. Delmas & F. Laclare, "Short vs Long time Series : Example of the Solar Diameter," *Solar Physics* 209, 391–396, 2002
- [52] C. Denker, D. Mascarinas, Y. Xu, W. Cao, G. Yang, Haimin Wang, P. R. Goode & T. Rimmele, "High-spatial-resolution imaging combining high-order adaptive optics, frame selection, and speckle masking reconstruction," *Solar Physics* 227, 217–230, 2005
- [53] C. Denker, A. Trischler, T. R. Rimmele, K. Richards, S. L. Hegwer & F. Wöger, "Adaptive Optics at the Big Bear Solar Observatory : Instrument Description and First Observations," *Publication of the Astronomical Society of the Pacific* 119, 170–182, 2007
- [54] D. Dravins, L. Lindegren, E. Mezey & A. T. Young, "Atmospheric Intensity Scintillation of Stars. I. Statistical Distributions and Temporal Properties," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 109, 173–207, 1997
- [55] D. Dravins, L. Lindegren, E. Mezey & A. T. Young, "Atmospheric Intensity Scintillation of Stars. II. Dependence on Optical Wavelength," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 109, 725–737, 1997
- [56] D. Dravins, L. Lindegren, E. Mezey & A. T. Young, "Atmospheric Intensity Scintillation of Stars. III. Effects for Different Telescope Apertures," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 110, 610–633, 1997
- [57] P. Druesne, J. Borgnino, C. Aime, R. Petrov & S. Kadiri, "Spatio-temporal Study of the Impulse Response of the Earth's Atmosphere by Solar-Limb Observations," *J. Opt.* 14, 11–17, 1983
- [58] A. Egidi, B. Caccin, S. Sophia, W. Heaps, W. Hoegy & L. Twigg, "High-Precision Measurements of the Solar Diameter and Oblatness by the Solar Disk Sextant (SDS) Experiment," *Solar Physics* 235, 407–418, 2006
- [59] M. Emilio, J. R. Kuhn, R. I. Bush & P. Scherrer, "On the Constancy of the Solar Diameter," *The Astrophysical Journal* 543, 1007–1010, 2000
- [60] J. Feynman & S. B. Gabriel, "Period and Phase of the 88-year Solar Cycle and the Maunder Minimum - Evidence for a Chaotic Sun," *Solar Physics* 127, 393–403, 1990
- [61] M. P. Fitzgerald & J. R. Graham, "Speckle Statistics in Adaptively Corrected Images," *The Astrophysical Journal* 637, 541–547, 2006
- [62] M. Fligge, S. K. Solanki & J. Beer, "Determination of Solar Cycle Length Variations Using the Continuous Wavelet Transform," *Astron. Astrophys.* 346, 313–321, 1999
- [63] P. Foukal, C. Frölich, H. Spruit & T. M. L. Wigley, "Variations in Solar luminosity and their effect on the Earth's climate," *Nature* 443, 161–166, 2006

- [64] C. O. Font, M. P. J. L. Chang, E. Oh & C. Gilbreath, "Humidity Contribution to the Refractive Index Structure Function C_n^2 ," SPIE 6215, 621502-1 – 621502-9, 2006
- [65] D. L. Fried, "Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures," J. Opt. Soc. Am. 56, 1372–1379, 1966
- [66] D. L. Fried, "Time-delay-induced mean-square error in adaptive optics," J. Opt. Soc. Am. A 7, 1224–1225, 1990
- [67] E. Friis-Christensen & H. Svensmark, "What do we Really Know About the Sun-Climate Connection?," Adv. Space Res. 20, 913–921, 1997
- [68] E. Friis-Christensen, "Solar Variability and Climate," Space Science Reviews 94, 411–421, 2000
- [69] U. Frisch, "Turbulence," Cambridge University Press, 1995
- [70] H. Furuhashi, K. Matsuda & C. P. Grover, "Visualisation of phase objects by use of a differentiation filter," Applied Optics 42, 218–226, 2003
- [71] M. Gai & R. Cancelliere, "An efficient spread function construction method," Mon. Not. R. Astron. Soc., 337, 1337–1342, 2007
- [72] E. Gendron & P. Léna, "Single layer atmospheric turbulence demonstrated by adaptive optics observations," Astrophys. Space Sci. 2, 221–228, 1996
- [73] D. Gough, "Sizing up the Sun," Nature 410, 313–314, 2001
- [74] O. Guyon, "Limits of adaptive optics for high-contrast imaging," The Astrophysical Journal, 629, 592–614, 2005
- [75] J. D. Haigh, "The effects of solar variability on the Earth's climate," Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 361, 95–111, 2002
- [76] H. Hasan & C. J. Burrows, "Telescope Image Modeling (TIM)," Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 107, 289–298, 1995
- [77] D. Hestroffer & C. Magnan, "Wavelength Dependency of the Solar Limb Darkening," A&A 333, 338–342, 1998
- [78] P. Hickson & K. Lanzetta, "Measuring Atmospheric Turbulence with a Lunar Scintillometer Array," Publications of the Astronomical Society of the Pacific 116, 1143–1152, 2004
- [79] H. A. Hill, R. T. Stebbins & J. R. Oleson, "The Finite Fourier Transform Definition of an Edge on the Solar Disk," The Astrophysical Journal 200, 484–498, 1975
- [80] R. J. Hill, "Spectra of Fluctuations in Refractivity, Temperature, Humidity, and Temperature-Humidity Cospectrum in the Inertial and Dissipation Ranges," Radio Science 13, 953–961, 1978
- [81] R. J. Hill & S. F. Clifford, "Modified Spectrum of Atmospheric Temperature Fluctuations and its Application to Optical Propagation," J. Opt. Soc. Am. 68, 892–899, 1978
- [82] F. Hill, R. Radick & M. Collados, "Deriving $C_n^2(h)$ from a scintillometer Array," Advanced Technology Solar Telescope Project Documentation, Report 0014, 2003
- [83] D. V. Hoyt & K. H. Schatten, "The Role of the Sun in Climate Change," Oxford University Press, 1997

- [84] C. Innocenti & A. Consortini, "Method for Estimating the Outer Scale of Atmospheric Turbulence and its Dependence on the Model," SPIE 5237, 25–30, 2004
- [85] A. Irbah, M. Chibani, L. Lakhal, A. Berdja, J. Borgnino, F. Martin, & P. Assus, "MISOLFA : a generalized solar seeing monitor," SF2A 2001-Lyon, EDPS Conference Series in Astronomy & Astrophysics, 59–61, 2001
- [86] A. Irbah, J. Borgnino, F. Laclare & G. Merlin, "Isoplanetism and High Spatial Resolution Solar Imaging," Astron. Astrophys. 276, 663–672, 1993
- [87] L. Joannes, F. Dubois & J.-C. Legros, "Phase-shifting schlieren : high-resolution quantitative schlieren that uses the phase-shifting technique principle," Applied Optics 42, 5046–5053, 2003
- [88] L. Jolissaint, J.-P. Véran, R. Conan, "Analytical Modeling of Adaptive Optics : Foundations of the Phase Spatial Power Spectrum Approach," J. Opt. Soc. Am. A. 23, 382–394, 2006
- [89] M. B. Jorgenson & G. J. M. Aitken, "Prediction of atmospherically induced wave-front degradation," Optics Letters 17, 466–468, 1992
- [90] D. A. Juckett, "Solar Activity Cycles, North/South Asymmetries, and Differential Rotation Associated with Solar Spin-Orbit Variations," Solar Physics 191, 201–226, 2000
- [91] S. Kadiri, C. Aime & G. Ricort, "One dimensional astronomical speckle interferometry - Study of the lens-atmosphere modulation transfer function obtained with a rectangular aperture by statistical analysis of the speckle pattern," Journal of Optics, 12, 143–151, 1981
- [92] S. Kadiri, R. G. Petrov, F. Martin, G. Ricort, J. Borgnino & C. Aime, "Study of Optical Transfer Function Anisotropies for Several Telescopes," Journal of Optics 17, 67–76, 1986
- [93] J. Kanipe, "A Cosmic Connection," Nature 443, 141–143, 2006
- [94] A. Kellerer & A. Tokovinin, "Atmospheric coherence times in interferometry : definition and measurement," A&A 461, 775–781, 2007
- [95] B. Kern, T. A. Laurence, C. Martin & P. E. Dimotakis, "Temporal coherence of individual turbulent patterns in atmospheric seeing," Applied Optics 39, 4879–4885, 2000
- [96] D. Kouznetsov, V. V. Voitsekhovich & R. Ortega-Martinez, "Simulations of Turbulence-Induced Phase and Log-Amplitude Distortions," Applied Optics 36, 464–469, 1997
- [97] J. R. Kuhn, R. I. Bush, M. Emilio & H. Scherrer, "On the Constancy of the Solar Diameter. II.," The Astrophysical Journal 613, 1241–1252, 2004
- [98] F. Laclare, C. Delmas, J. P. Coin & A. Irbah, "Measurements and Variations of the Solar Diameter," Solar Physics 166, 211–229, 1996
- [99] R. G. Lane, A. Glindemann & J. C. Dainty, "Simulation of a Kolmogorov Phase Screen," Waves in Random Media 2, 209–224, 1992
- [100] B. F. Lane & M. W. Mutterspaugh, "Phase referencing and narrow-angle astrometry in current and future interferometers," SPIE 5491, 47–55, 2004
- [101] J. Lancis, T. Szoplik, E. Tajahuerce, V. Climent & M. Fernández-Alonso, "Fractional derivative Fourier plane filter for phase-change visualization," Applied Optics 36, 7461–7464, 1997

- [102] T. Landscheidt, "Extrema in Sunspot Cycle Linked to Sun's Motion," *Solar Physics* 189, 415–426, 1999
- [103] T. Landscheidt, "Solar Wind Near Earth : Indicator of Variations in Global Temperature," *Proc. 1st Solar & Space Weather Euroconference, "The Solar Cycle and Terrestrial Climate"*, Santa Cruz de Tenerife, Spain, 497–500, 25-29 September 2000
- [104] K. Langhans & W. Schmidt, "Center-to-Limb-Variation of the G-band Lines at 430.5 nm," *A&A* 382, 312–318, 2002
- [105] A. Larkin, J. D. Haigh & S. Djavidnia, "The Effect of Solar UV Irradiance Variations on the Earth's Atmosphere," *Space Science Reviews* 94, 199–214, 2000
- [106] K. Lassen & E. Friis-Christensen, "Variability of the solar cycle length during the past five centuries and the apparent association with terrestrial climate," *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics* 57, 835–845, 1995
- [107] R. S. Lawrence & J. W. Strohbehn, "A Survey of Clear-Air Effects Relevant to Optical Communications," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 58, 1523–1545, 1970
- [108] P. R. Lawson, "Principles of Long Baseline Stellar Interferometry," *Course Notes from the 1999 Michelson Summer School August 15-19, 1999*
- [109] L. H. Lee, G. J. Baker & R. S. Benson, "Correctability limitations imposed by plane-wave scintillation in multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A*, 23, 2602–2612, 2006
- [110] S. Lefebvre, L. Bortello, R. K. Ulrich, J. E. Boyden & J.-P. Rozelot, "Solar Radius Measurements at Mount Wilson," *Proceedings of the SOHO 14 / GONG 2004 Workshop*, New Haven, Connecticut, USA, 12–16 July 2004, ESA SP-559, 532–535, 2004
- [111] S. Lefebvre & A. G. Kosovichev, "Changes in the Subsurface Stratification of the Sun with the 11-year Activity Cycle," *The Astrophysical Journal* 633, L149–L152, 2005
- [112] L. Lindegren, "Atmospheric limitations of narrow-field optical astrometry," *Astron. Astrophys.* 89, 41–47, 1980
- [113] R. P. Linfield, M. M. Colavita & B. F. Lane, "Atmospheric turbulence measurements with the Palomar Testbed Interferometer," *The Astrophysical Journal*, 554, 505–513, 2001
- [114] W. Livingston & L. Wallace, "The Sun's Immutable Basal Quiet Atmosphere," *Solar Physics* 212, 227–237, 2003
- [115] H. Liu, Y. Yan, Q. Tan & G. Jin, "Theories for the Design of Diffractive Superresolution Elements and Limits of Optical Resolution," *J. Opt. Soc. Am. A*, 19, 2185–2193, 2002
- [116] H. Liu, Y. Yan & G. Jin, "Design Theories and Performance Limits of Diffractive Superresolution Elements with the Highest Sidelobe Suppressed," *J. Opt. Soc. Am. A*, 22, 828–838, 2005
- [117] M. Lloyd-Hart & P. McGuire, "Spatio-temporal prediction for adaptive optics wavefront reconstructors," *Adaptive Optics, OSA Proceedings Series*, 95–101, 1995

- [118] M. Lockwood, "Long-Term Variations in the Open Solar Flux and Possible Links to Earth's Climate," Proc. SOHO 11 Symposium, "From Solar Min to Max : Half a Solar Cycle with SOHO", Davos, Switzerland, 507–522, 11-15 March 2002
- [119] A. Ludmány & T. Baranyi, "Comparative Study of the Atmospheric Effects Driven by Irradiance vs. Corpuscular Radiation," Proc. 1st Solar & Space Weather Euroconference, "The Solar Cycle and Terrestrial Climate", Santa Cruz de Tenerife, Spain, 141–146, 25-29 September 2000
- [120] V. P. Lukin & B. V. Fortes, "Adaptive Beaming and Imaging in the Turbulent Atmosphere," SPIE Press, 2002
- [121] V. P. Lukin, L. V. Antoshkin, N. N. Botygina, O. N. Ermaleev, V. M. Grigor'ev, P. A. Koyaev, A. P. Yankov, P. G. Kovadlo & V. I. Skomorovskii, "Adaptive optical system for a ground-based solar telescope," J. Opt. Technol. 73, 197–201, 2006
- [122] J. Maire, A. Ziad, J. Borgnino, D. Mourard, F. Martin, S. Jankov, D. Bonneau & F. Patru, "Wavefront outer scale deduced from interferometric dispersed fringes," A&A 448, 1225–1234, 2006
- [123] J. Maire, "Modélisation des effets optiques de la turbulence atmosphérique pour les grands télescopes et les observations à Haute Résolution Angulaire," PhD Thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2007
- [124] J. Maire, A. Ziad, J. Borgnino & F. Martin, "Measurements of profiles of the wavefront outer scale using observations of the limb of the moon," Mon. Not. R. Astron. Soc., 377, 1236–1244, 2007
- [125] F. Martin, J. Borgnino & F. Roddier, "Localisation de couches turbulentes atmosphériques par traitement optique de clichés d'ombres volantes stellaires," Nouv. Rev. Optique 6, 15–23, 1975
- [126] F. Martin & J. Borgnino, "Analyse statistique des déformations aléatoires d'une surface d'onde dues à la turbulence atmosphérique au voisinage du sol. II.- Estimation des fonctions de corrélations par traitement numérique," J. Optics (Paris), 9, 15–24, 1978
- [127] E. Masciadri & J. Vernin, "Optical techniques for inner-scale measurement : possible astronomical applications," Applied Optics 36, 1320-1327, 1997
- [128] D. R. McGaughey & G. J. M. Aitken, "Temporal analysis of stellar wavefront-tilt data," J. Opt. Soc. Am. A 14, 1967–1974, 1997
- [129] K. Mikurda & O. von der Lühe, "High resolution solar speckle imaging with the extended Knox-Thompson algorithm," Solar Physics 235, 31–53, 2006
- [130] J. D. Monnier, "Optical interferometry in astronomy," Rep. Prog. Phys. 66, 789–857, 2003
- [131] T. Nakajima, "Signal-to-Noise Ratio of the Bispectral Analysis of Speckle Interferometry," J. Opt. Soc. Am. A. 5, 1477–1491, 1988
- [132] M. Nazarethy & J. Shamir, "Fourier Optics Described by Operator Algebra," J. Opt. Soc. Am. A. 70, 150–159, 1980
- [133] H. Neckel & D. Labs, "The Solar Radiation between 3300 and 12500 Å," Solar Physics 90, 205–258, 1984
- [134] H. Neckel & D. Labs, "Solar Limb Darkening 1986-1990 ($\lambda\lambda 303$ to 1099 nm)," Solar Physics 153, 91–114, 1994

- [135] H. Neckel, "On the Wavelength Dependency of Solar Limb Darkening ($\lambda\lambda 303$ to 1099 nm)," Solar Physics 167, 9–23, 1996
- [136] H. Neckel, "Analytical Reference Functions $F(\lambda)$ for the Sun's Limb Darkening and its Absolute Continuum Intensities ($\lambda\lambda 300$ to 1100 nm)," Solar Physics 229, 13–33, 2005
- [137] F. Noël, "On Solar Radius Variations Observed with Astrolabes," Solar Physics 232, 127–141, 2005
- [138] J. Ojeda-Castaneda & L. R. Berriel-Valdos, "Classification scheme and properties of schlieren techniques," Applied Optics 18, 3338–3341, 1979
- [139] J. Pap, C. Frölich, J. Kuhn, S. Sofia & R. Ulrich, "A Discussion of Recent Evidence for Solar Irradiance Variability and Climate," Adv. Space Res. 29, 1417–1426, 2002
- [140] L. A. Poyneer & B. Macintosh, "Spatially filtered wave-front sensor for high-order adaptive optics," J. Opt. Soc. Am. A 21, 810–819, 2004
- [141] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery, "Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, 1992
- [142] K. G. Puschmann & M. Sailer, "Speckle reconstruction of photometric data observed with adaptive optics," A&A 454, 1011–1019, 2006
- [143] R. Rao, S. Wang, X Liu & Z. Gong, "Turbulence spectrum effect on wave temporal-frequency spectra for light propagating through the atmosphere," J. Opt. Soc. Am. A 16, 3755–2762, 1999
- [144] C.-H. Rao, W.-H. Jiang, C. Fang, N. Ling, W.-C. Zhou, M.-D. Ding, X.-J. Zhang, D.-. Chen, M. Li, X.-F ; Gao & T. Mi, "A Tilt-correction Adaptive Optics System for the Solar Telescope of Nanjing University," Chin. J. Astron. Astrophys. 3, 576–585, 2003
- [145] C. Robert, J.-M. Conan, V. Michau, T. Fusco & N. Vedrenne, "Scintillation and phase anisoplanatism in Shack-Hatmann wavefront sensing," J. Opt. Soc. Am. A, 23, 613–624, 2006
- [146] A. Rocca, F. Roddier & J. Vernin, "Detection of Atmospheric Turbulent Layers by Spatiotemporal and Spatioangular Correlation measurements of Stellar-Light Scintillation," J. Opt. Soc. Am. 64, 1000–1004, 1974
- [147] F. Roddier, "Effects of Atmospheric Turbulence in Optical Astronomy," Progress in Optics 19, E. Wolf Ed, 281–376, 1981
- [148] F. Roddier, J. M. Gilly & J. Vernin, "On the Isoplanatic Patch Size in Stellar Speckle Interferometry," J. Optics (Paris) 13, 63–70, 1982
- [149] F. Roddier, J. M. Gilli & G. Lund, "On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry," J. Optics (Paris) 13, 263–271, 1982
- [150] F. Roddier & P. Léna, "Long-baseline Michelson Interferometry with large ground-based telescopes operating at optical wavelengths," J. Optics (Paris) 15, 171–182, 1984
- [151] M. C. Roggemann & B. M. Welsh, "Imaging Through Turbulence," CRC Press LLC, 1996
- [152] J. Rösch & R. Yerle, "Solar diameter(s)," Solar Physics 82, 139–150, 1983

- [153] A. Sagan, S. Nowicki, R. Buczynski, M. Kowalczyk & T. Szoplik, "Imaging phase objects with square-root, Foucault, and Hoffman real filters : a comparison," *Applied Optics* 42, 5816–5824, 2003
- [154] M. Sarazin & F. Roddier, "The ESO Differential Image Motion Monitor," *Astron. Astrophys.* 277, 294–300, 1990
- [155] W. Schmidt & T. Kentischer, "Optical system of an Advanced Solar Correlation Tracker," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* 113, 363–368, 1995
- [156] M. Schöck & E. J. Spillar, "Measuring wind speeds and turbulence with a wave front sensor," *Optics letters* 23, 150–152, 1998
- [157] M. Schöck, "An Analysis of Turbulent Layers with a Wave Front Sensor," PhD Thesis, University of Wyoming, 1998
- [158] M. Schöck & E. J. Spillar, "Measuring wind speeds and turbulence with a wave front sensor," *Optics letters* 23, 150–152, 1998
- [159] M. Schöck & E. J. Spillar, "Analysis of turbulent atmospheric layers with a wavefront sensor : testing the frozen flow hypothesis," *SPIE* 3762, 225–236, 1999
- [160] M. Schöck & E. J. Spillar, "Method for a quantitative investigation of the frozen flow hypothesis," *J. Opt. Soc. Am. A* 17, 1650–1658, 2000
- [161] N. Seghouani, A. Irbah & J. Borgnino, "Estimation of the coherence outer scale for daytime observations," *Astronomical Site Evaluation in the Visible and Radio Range, Morocco* November 13-17, 2000
- [162] M. Shao & M. M. Colavita, "Long-baseline optical and infrared interferometry," *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 30, 457–498, 1992
- [163] M. Shao & M. M. Colavita, "Potential of long-baseline infrared interferometry for narrow-angle astrometry," *Astron. Astrophys.* 262, 353–358, 1992
- [164] F. G. Smith Editor, "Atmospheric Propagation of Radiation," *Infrared and Electro-Optical Systems Handbook, Vol. 2*, 1993
- [165] H. Socas-Navarro, J. Beckers, P. Brandt, J. Briggs, T. Brown, M. Collados, C. Denker, S. Fletcher, S. Hegwer, F. Hill, T. Horst, M. Komsa, J. Kuhn, A. Lecinski, H. Lin, S. Oncley, M. Penn, T. Rimmele & K. Streander, "Solar Site Survey for the Advanced Technology Solar Telescope. I. Analysis of the Seeing Data," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 117, 1296–1305, 2005
- [166] S. K. Solanki, N. A. Krivova, M. Schüssler & M. Fligge, "Search for a Relationship Between Solar Cycle Amplitude and Length," *A&A* 396, 1029–1035, 2002
- [167] D. Soltau, D. S. Acton, Th. Kentisher, M. Röser, W. Schmidt, M. Stix & O. von der Lühe, "Adaptive Optics at the German VTT on Tenerife," 1st Advances in Solar Physics Euroconference, *Advances in the Physics of Sunspots*, ASP Conference Series 118, 351–355, 1997
- [168] D. B. Soules, J. J. Drexler, B. F. Draayer, F. D. Eaton & J. R. Hines, "Exposure-time effects on differential r_0 measurements," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 817–827, 1996
- [169] A. Sozzetti, "Astrometric Methods and Instrumentation to Identify and Characterize Extrasolar Planets : A Review," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 117, 1021–1048, 2005

- [170] D. St-Jacques, "Astronomical seeing in space and time, a study of atmospheric turbulence in Spain and England, 1994-98," PhD Thesis, University of Cambridge, 1998
- [171] D. St-Jacques & J. E. Baldwin, "Taylor's hypothesis : good for nuts," SPIE 4006, 951-962, 2000
- [172] J. W. Strohbehn, "Line-of-Sight Wave Propagation Through the Turbulent Atmosphere," Proceedings of the IEEE, Vol. 56, 1301-1318, 1968
- [173] W. J. Tango, "Why We Need Adaptive Optics for Interferometry," Adaptive Optics and Interferometry in the 21st Century, ASP Conference Series, 174, 11-20, 1999
- [174] V. I. Tatarskii, "The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation," Israel Program for Scientific Translations, 1971
- [175] H. Tennekes & J. L. Lumley, "A First Course in Turbulence," The MIT Press, 1972
- [176] P. Thejll & K. Lassen, "Solar Forcing of the Northern Hemisphere Land Air Temperature : New Data," Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics 62, 1207-1213, 2000
- [177] S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau & G. Rousset, "Comparison of Centroid Computation algorithms in a Shack-Hartmann Sensor," Mon. Not. R. Astron. Soc. 371, 323-336, 2006
- [178] G. Thuillier, M. Hersé, P. C. Simon, D. Labs, H. Mandel, D. Gillotay & T. Foujols, "The Visible Solar Spectral Irradiance from 350 to 850 nm as Measured by the SOLSPEC Spectrometer during the ATLAS I Mission," Solar Physics 177, 41-61, 1998
- [179] G. Thuillier, M. Hersé, D. Labs, T. Foujols, W. Peetermans, D. Gillotay & H. Mandel, "The Solar Spectral Irradiance from 200 to 2400 nm as Measured by the SOLSPEC Spectrometer from the ATLAS and EURECA Missions," Solar Physics 214, 1-22, 2003
- [180] G. Thuillier, S. Sophia & M. Harberreiter, "Past, Present and Future Measurements of the Solar Diameter," Advances in Space Research 35, 329-340, 2005
- [181] A. Tokovinin, "From Differential Image Motion to Seeing," Publications of the Astronomical Society of the Pacific 114, 1156-1166, 2002
- [182] R. K. Ulrich & L. Bertello, "Solar-Cycle Dependence of the Sun's Apparent Radius in the Natural Iron Spectral Line at 525nm," Nature 377, 214-215, 1995
- [183] N. Vedrenne, V. Michau, C. Robert, J.-M. Conan & T. Fusco, "Wavefront Sensing on extended sources : Anisoplanatism effects on phase estimation," SPIE 5894, 259-268, 2005
- [184] J. Vernin & F. Roddier, "Experimental Determination of Two-Dimensional Spatiotemporal Power Spectra of Stellar Light Scintillation : Evidence for a Multilayer Structure of the Air Turbulence in the Upper Troposphere," J. Opt. Soc. Am. 63, 270-273, 1973
- [185] J. Vernin, J.-L. Caccia, G. Weigelt & M. Müller, "Speckle lifetime and isoplanicity determinations - Direct measurements and derivation from turbulence and wind profiles," A&A 243, 553-558, 1991

- [186] J. Vernin, "Mechanism of Formation of Optical Turbulence," IAU Site 2000, ASP Conference Series, Vol. 266, 2002
- [187] V. V. Voitsekhovich, "Outer Scale of Turbulence : Comparison of Different Models," J. Opt. Soc. Am. A 12, 1346–1353, 1995
- [188] V. V. Voitsekhovich, D. Kouznetsov, V. G. Orlov & S. Cuevas, "Method of Random Wave Vectors in Simulation of Anisoplanatic Effects," Applied Optics 38, 3985–3992, 1999
- [189] V. V. Voitsekhovich, L. J. Sánchez & V. G. Orlov, "Effect of scintillation on adaptive optics systems," Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, 38, 193–198, 2002
- [190] V. V. Voitsekhovitch, D. Kouznetov & V. G. Orlov, "Simulating the Phase Fluctuations Produced by Many Stars in the Weak Atmospheric Turbulence Limit," A&A 444, 635–641, 2005
- [191] O. von der Lühe, "A study of a correlation tracking method to improve imaging quality of ground-based solar telescopes," Astron. Astrophys. 119, 85–94, 1983
- [192] O. von der Lühe, "Wavefront error measurement technique using extended, incoherent light sources," Optical Engineering 27, 1078–1087, 1988
- [193] O. von der Lühe, A. L. Widener, Th. Rimmele, G. Spence, R. B. Dunn & P. Wiborg, "Solar feature correlation tracker for ground-based telescopes," Astron. Astrophys. 224, 351–360, 1989
- [194] O. von der Lühe, "Speckle imaging of solar small scale structure. I. Methods," Astron. Astrophys. 268, 374–390, 1993
- [195] O. von der Lühe, "Speckle imaging of solar small scale structure. II. Study of small scale structure in active regions," Astron. Astrophys. 281, 889–910, 1994
- [196] O. von der Lühe, "Photometric Stability of Multi-Conjugate Adaptive Optics," SPIE 5490, 617–624, 2004
- [197] C. S. Williams & O. A. Becklund, "Introduction to the Optical Transfer Function," Wiley Series in Pure and Applied Optics, 1989
- [198] R. G. Wilson, "Wavefront-error evaluation by mathematical analysis of experimental Foucault-test data," Applied Optics 14, 2286–2297, 1975
- [199] <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2003/13/image/a/>
- [200] <http://nsokp.nso.edu/mp/mpfacts.html>
- [201] <http://solarscience.msfc.nasa.gov/surface.shtml>
- [202] M. V. Zombeck, "Handbook of Astronomy and Astrophysics," Cambridge University Press, 1990

Résumé

L'observation du Soleil à haute résolution angulaire est d'une grande importance en astronomie. Dans ce contexte, je montre les effets de la turbulence optique sur les images solaires, notamment sur les mesures astrométriques du diamètre solaire en longue pose. Je propose, dans l'approximation des faibles perturbations, une modélisation des fluctuations d'angle d'arrivée locales chromatiques et polychromatiques qui a des retombées directes pour les observations diurnes de la turbulence optique. Afin d'extraire les fluctuations d'angle d'arrivée à partir des images courte pose du bord solaire, je propose une approche efficace et stable qui consiste en une intégration photométrique saturée avec test de l'anisoplanétisme local. Cette méthode améliore l'efficacité des méthodes précédentes. Elle a aussi des retombées sur la mesure du diamètre solaire en longue pose et la définition du diamètre photométrique. Une autre manière de mesurer les fluctuations d'angle d'arrivée de jour est de le faire dans le plan conjugué de la pupille. J'étudie cette approche avec sa validité et ses limites. Comme application directe on présente le concept d'un moniteur profileur de la turbulence optique basse altitude. Une autre partie importante de mon travail est la modélisation de la variation temporelle de la turbulence optique en introduisant le bouillonnement propre. Le modèle théorique que je propose est présenté avec des exemples liés à des techniques diverses de l'observation à haute résolution angulaire (interférométrie, optique adaptative...) en présence de turbulence optique.

Abstract

The observation of the Sun at high angular resolution is of great importance in astronomy. In this context, I show the effects of optical turbulence on solar images, especially on the astrometric long exposure measurements of the solar diameter. I propose a modelling, in the small perturbation approximation, of the chromatic and polychromatic local angle of arrival fluctuations, which has direct relevance for optical turbulence daytime observations. In order to extract angle of arrival fluctuations from short exposure images of solar edge, I propose an effective and stable method that consists of a photometric integration with local anisoplanatism test. This method increases the efficiency of previous approaches. It also impacts on the long exposure measurement of the solar diameter as well as on the definition of solar photometric diameter. Another way to measure daytime angle of arrival fluctuations is to do so in the pupil plane. I studied this approach with its validity and limitations. As a direct application, we propose a concept of a profiling monitor for the low altitude optical turbulence. Another important part of my work has been the modelling of the temporal variation of optical turbulence by introducing proper boiling. The theoretical framework that I propose is presented with examples (interferometry, adaptive optics...) related to various high angular resolution observation techniques in the presence of optical turbulence.